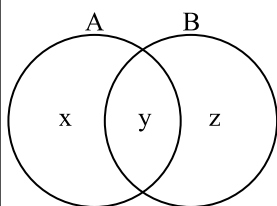


پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۴



$$(x + y) - (y + z) = 14 \Rightarrow x - z = 14$$

$$(x + y + z) - y = x + z = 20$$

$$\Rightarrow x = 17, \quad z = 3 \quad n(B - A) = Z = 3$$

۲ گزینه ۲ - y^2 شمارنده ۷۲ است؛ بنابراین:

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

بنابراین با حذف ۳ زوج مرتب عضو که زوج مرتبهای f تابع می شود.

۳ گزینه ۱

$f =$

$$\left\{ (30, 0), \underbrace{(15, 1)}, \underbrace{(10, 2)}, \underbrace{(6, 4)}, \underbrace{(5, 5)}, \underbrace{(3, 9)}, \underbrace{(2, 14)}, \underbrace{(1, 29)} \right\}$$

می بایست حداقل ۷ عضو که عضوهای اول برابر دارند را حذف کنیم.

۴ گزینه ۴ درون پراکنش مجموع دو تابع اکیداً نزولی است که به توان عدد فرد ۳ می رسند، پس تابع اکیداً نزولی می شود.

$$(f \circ f)(x) < f(2^{-3x}) \Rightarrow f(f(x)) < f(2^{-x})^3 \rightarrow f(x) > (2^{-x})^3 \Rightarrow$$

$$((\frac{1}{2})^x + \log_{0.5} x)^3 > ((\frac{1}{2})^x)^3 \rightarrow (\frac{1}{2})^x + \log_{0.5} x > (\frac{1}{2})^x \Rightarrow \log_{0.5} x > 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

۵ گزینه ۲ چون $|x| = 1$ در هر دو ضابطه وجود دارد لذا به ازای این مقدار داریم:

$$\sqrt{1+3} + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow f(3) = 3 \times 3^2 + 5 = 32$$

۶ گزینه ۱

$$f = (7, 1 - 3n^2), (1, -1), (2, n), (7, -2n), (\frac{1}{n}, 2)$$

چون f تابع است پس داریم:

$$(7, 1 - 3n^2) \in f, \quad (7, -2n) \in f$$

$$\Rightarrow 1 - 3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \xrightarrow[\text{صفر}]{\text{مجموع ضرایب}}$$

$$n = 1, n = -\frac{1}{3}$$

$$\text{اگر } n = 1 \Rightarrow (1, -1) \in f, (1, 2) \in f$$

بنابراین $n = 1$ غیر قابل قبول است و $n = -\frac{1}{3}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow f(2) = n \Rightarrow f(2) = -\frac{1}{3}$$

۷ گزینه ۳

$$3n^2 - 1 = 2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = (n-1)(3n+1) = 0$$

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow (1,1), (1,2) \in f \\ n=\frac{-1}{3} \Rightarrow f(3) = \frac{1}{n} = -3 \end{cases}$$

۸ گزینه ۱ $x = 2,5$ ریشهٔ معادلهٔ کسر است؛ پس $1 \in C$.

چون تابع در $x = 1$ پیوسته است، پس داریم:

$$\frac{2+a+b}{4-1} = 4-5$$

$$\Rightarrow a+b=4$$

۹ گزینه ۴ از آنجا که توابع g و $g \circ f$ روی محور x ها متقاطع هستند. باید عرض نقطهٔ تقاطع برابر با صفر باشد.

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3+ax} = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{a} (a \neq 0)$$

$$(g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3+a(2-x)} = 0 \xrightarrow{x=\frac{-3}{a}} \sqrt{2a+6} = 0 \Rightarrow a = -3$$

۱۰ گزینه ۴

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}, \quad 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f = [-3, 3] - \{1\} = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

اگر بازهٔ $I = (k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع باشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

$$I \subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} k-2 \geq -3 \\ 3k+2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -1 \\ k < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 \leq k < -\frac{1}{3} \quad (1)$$

یا

$$I \subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} k-2 > 1 \\ 3k+2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 3 \\ k \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \emptyset \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow -1 \leq k < -\frac{1}{3} \Rightarrow k \in [-1, -\frac{1}{3})$$

۱۱ گزینه ۴ روش اول: کافی است عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

$$|x^2-2|-x > 0 \rightarrow |x^2-2| > x$$

ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{2}$ هستند.

$$x < -\sqrt{2} \rightarrow x^2-2 > x \rightarrow x^2-x-2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x < -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \rightarrow -x^2 + 2 > x \rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \rightarrow (x+2)(x-1) < 0$$

$$\rightarrow -2 < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -2 < x < 1$$

$$x > \sqrt{2} \rightarrow x^2 - 2 > x \rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x > 2$$

از اجتماع جواب‌های به دست آمده به $x > 2$ یا $x < 1$ می‌رسیم.

روش دوم: به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند $\rightarrow$ جلوی لگاریتم منفی می‌شود $\rightarrow x = 2$

گزینه ۱ حذف می‌شود $\rightarrow$ جلوی لگاریتم مثبت می‌شود $\rightarrow x = -1$

۱۲ گزینه ۱ عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید نامنفی باشد. جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال به صورت زیر است:

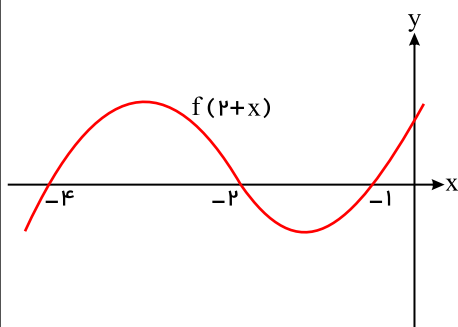
x	0	1
x	-	+
$\log_{x/5}$	+	-
P	+	-

$$D_f = (0, 1)$$

در دامنه تابع f ، هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

۱۳ گزینه ۱ برای رسم نمودار $f(x+2)$ باید نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

با توجه به شکل داده شده $D_f = R \Leftarrow$



$$-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(2+x)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, f(2+x) < 0 \\ \text{یا} \\ f(x) \leq 0, f(2+x) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, f(2+x) < 0 \Rightarrow [-2, 0] \cup [1, \infty) \cap (-2, -1) \cup (-\infty, -4) \Rightarrow (-2, -1) \\ f(x) \leq 0, f(2+x) > 0 \Rightarrow (-\infty, -2] \cup [0, 1] \cap (-4, -2) \cup (-1, +\infty) \Rightarrow (-4, -2) \cup [0, 1] \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow (-2, -1) \cup (-4, -2) \cup [0, 1] \Rightarrow \underbrace{[-3, 0, 1]}_{\text{۳ عدد صحیح}}$$

۱۴ گزینه ۴ می‌توان نوشت:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 5 \sin^2 x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq 5 \sin^2 x - 1 \leq 4$$

چون $5 \sin^2 x - 1$ زیر رادیکال است باید نامنفی باشد، پس:

$$0 \leq \sqrt{5 \sin^2 x - 1} \leq 2 \Rightarrow 0 \geq -\sqrt{5 \sin^2 x - 1} \geq -2$$

تابع 2^t اکیداً صعودی است، پس:

$$2^\circ \geq 2^{-\sqrt{5} \sin^\circ x - 1} \geq 2^{-2} \Rightarrow R_f = \left[\frac{1}{4}, 1\right] \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{5}{4}$$

۱۵ گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به جای x عبارت $x - 3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد $2 -$ اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x - 4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۱۶ گزینه ۱

$$y = x^2 - x - 3 \xrightarrow[x \rightarrow x+2]{\text{واحد به چپ}} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{واحد به چپ}} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال باید نامعادله $y < 0$ را حل کنیم.

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2 \Rightarrow x \in (-5, 2)$$

۱۷ گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{واحد در جهت مثبت محور } x]{\text{واحد در جهت مثبت محور } x} g(x) = \sqrt{x - 12} \xrightarrow[\text{واحد در جهت مثبت محور } y]{\text{واحد در جهت مثبت محور } y} h(x) = \sqrt{x - 12} + 2$$

$$\text{تلاقی: } \sqrt{x} = \sqrt{x - 12} + 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x = x - 12 + 4 + 4\sqrt{x - 12} \rightarrow 8 = 4\sqrt{x - 12} \rightarrow 2 = \sqrt{x - 12}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4 = x - 12 \rightarrow x = 16 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 4$$

$$\text{پس: } A \left| \begin{matrix} 16 \\ 4 \end{matrix} \right|, O \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right| \rightarrow AO = \sqrt{(16 - 0)^2 + (4 - 0)^2} \\ = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16^2 + 16} = \sqrt{16(16 + 1)} = 4\sqrt{17}$$

۱۸ گزینه ۱

$$f(x) = (x - 1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x]{\text{قرینه نسبت به محور } x} g(x) = -(x - 1)^2 + 1 \xrightarrow[\text{واحد در جهت مثبت محور } y]{\text{واحد در جهت مثبت محور } y} h(x) \\ = -(x - 1)^2 + 1 + 16 \rightarrow h(x) = -(x - 1)^2 + 17$$

$$\text{تلاقی: } (x - 1)^2 - 1 = -(x - 1)^2 + 17 \rightarrow 2(x - 1)^2 = 18 \rightarrow (x - 1)^2 = 9$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 8 \\ x - 1 = -3 \rightarrow x = -2 \end{cases} \text{ غ ق (} x > 1 \text{)}$$

$$\text{پس: } A \left| \begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix} \right|, B \left| \begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix} \right| \rightarrow AB = \sqrt{(4 - 0)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۱۹ گزینه ۳ معکوس تابع را به دست می‌آوریم (قرینه نسبت به $y = x$)، دقت کنید برد تابع $y \geq 2$ است پس دامنهٔ تابع معکوس $x \geq 2$ خواهد بود:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow x - 1 = (y - 2)^2 \Rightarrow x = (y - 2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 2)^2 + 1; x \geq 2 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{واحد راست}} g(x) = (x - 4)^2 - 2; x \geq 4 \Rightarrow g(4) = -2$$

۲۰ گزینه ۴ طبق تبدیل‌های گفته شده داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{مصدر } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \frac{-1}{x-1} \xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{\text{واحد به}} y = \frac{-1}{x-1} = 2$$

حال معادله زیر را حل می‌کنیم تا نقطه برخورد تابع حاصل با f به دست آید.

$$\frac{-1}{x-1} - 2 = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times x(x-1)} -x - 2x(x-1) = x - 1 \Rightarrow -x - 2x^2 + 2x = x - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \text{نقطه برخورد } A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) \text{ یا } A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$$

فاصله نقطه A تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\pm \sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۲۱ گزینه ۳ تابع f همانی است، پس $f(x) = x$ ؛ ضابطه تابع g نیز به صورت $g(x) = \frac{1}{x-a}$ می‌شود. طبق فرض، ریشه معادله زیر برابر $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است:

$$|g(x)| - 2 = \frac{1}{|f(x)|} \Rightarrow \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 = \frac{1}{|x|}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-a} \right| - 2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{2}}{2}-a \right|} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

چون تابع f همانی است، پس از $f(x+a) = 3$ نتیجه می‌شود $x+a = 3$ و اختلاف مقادیر x در آن به صورت زیر می‌شود:

$$x_1 + a_1 = 3 = x_2 + a_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = a_2 - a_1$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

۲۲ گزینه ۱

$$f(x-2) = ax(x+1)(x-2), a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x+2)(x+3)(x), a < 0 \\ f(1-x) = a(3-x)(4-x)(1-x), a < 0 \\ f(x+1) = a(x+3)(x+4)(x+1), a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(1-x)}{f(x+1)} = \frac{a(3-x)(4-x)(1-x)}{a(x+3)(x+4)(x+1)} \geq 0 \rightarrow \boxed{\frac{f(1-x)}{f(x+1)} = \frac{(3-x)(4-x)(1-x)}{(x+3)(x+4)(x+1)} \geq 0}$$

x	-۴	-۳	-۱	۱	۳	۴
$f(1-x)$	-	+	-	+	-	+
$f(x+1)$	-	+	-	+	-	+

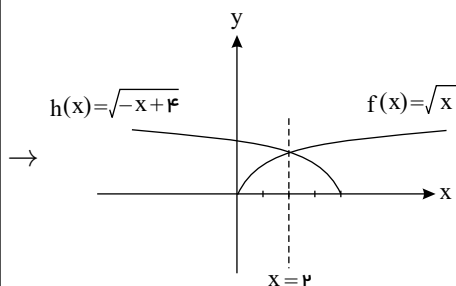
$$x = 0, x = 1, x = 3, x = 4$$

تنها اعداد قابل قبول با توجه به بازه‌های مثبت و اعدادی که صفر می‌کنند عبارتند از:

۲۳ گزینه ۳

۲ نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} h(x) = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4}$$



مشخص است که این دو نسبت به خط $x = 2$ متقارن هستند.

۲۴ گزینه ۲

$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x) = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به سمت بالا}} h(x) = -(-x-1)^2 + 4$$

$$(x-1)^2 = -(-x-1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x = -x^2 - 1 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -1$$

۲۵ گزینه ۳

$$y = 2|\sin x| \xrightarrow{\text{به } \frac{\pi}{2} \text{ راست}} y = 2|\sin(x - \frac{\pi}{2})| = 2|\cos x| \xrightarrow{\text{به پایین}} y = 2|\cos x| - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2|\cos x| = \frac{3}{2}$$

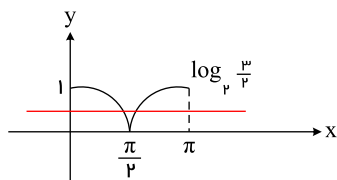
$$\Rightarrow \log_2 \frac{3}{2} = |\cos x|$$

$\log_2 \frac{3}{2}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$$\underbrace{\log_2 1}_{\text{صفر}} < \log_2 \frac{3}{2} < \underbrace{\log_2 2}_1$$

حال تابع $y = |\cos x|$ و خط $y = \log_2 \frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم.

خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.



۲۶ گزینه ۳

روش اول:

$$y = \sqrt{4-x} \xrightarrow{\text{واحد در راستای قائم}} y = \sqrt{4-x} + k \xrightarrow{\text{واحد در راستای افقی}} y = \sqrt{4-(x-(k-2))} + k$$

محل برخورد تابع فوق و وارونش در نقطه‌ای با عرض ۱ است که باید روی خط $y = x$ باشد، پس نقطه $(1, 1)$ در تابع صدق می‌کند.

$$1 = \sqrt{4 - (1 - (k - 2))} + k \Rightarrow \sqrt{k + 1} + k = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2 - x} \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y = \sqrt{2 - x} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{محل برخورد با } x} \sqrt{2 - x} = 1 \Rightarrow 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$$

روش دوم: توابع رادیکالی به فرم داده شده در صورت سؤال، وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. پس منحنی جدید وارون خود را در نقطه $(1, 1)$ قطع کرده است. با انتقال ۱ واحد این نمودار به پایین، نقطه $(1, 1)$ به نقطه $(1, 0)$ متناظر می‌شود، در نتیجه طول نقطه برخورد نمودار نهایی با محور x برابر ۱ است.

۲۷ گزینه ۱

$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow{\text{۳ واحد چپ}} y_1 = 2^{x+3+|x+3|} \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y_2 = 2^{x+3+|x+3|} - 2$$

$$\xrightarrow{y=0} 2^{x+3+|x+3|} = 2^1 \rightarrow x + 3 + |x + 3| = 1 \rightarrow x + |x + 3| = -2 \xrightarrow{\text{چک کردن گزینه‌ها}} x = -\frac{5}{2}$$

۲۸ گزینه ۴ برای انتقال در راستای محور x ها به اندازه ۲ واحد به چپ، باید x را به $x + 2$ تبدیل کنیم، پس:

$$f(x) = 4x - x^2 \xrightarrow{x \rightarrow x+2} f(x+2) = 4(x+2) - (x+2)^2 \Rightarrow f(x+2) = 4x + 8 - x^2 - 4x - 4 = 4 - x^2$$

حال نقطه تلاقی توابع $y = 4 - x^2$ و $y = 4x - x^2$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 4 - 1^2 = 3 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی: } A(1, 3)$$

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

۲۹ گزینه ۳

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{انتقال یک واحد به چپ}} y = 3 - \sqrt{2(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -3 + \sqrt{2x+2} \xrightarrow{\text{انتقال دو واحد به بالا}} y = -3 + \sqrt{2x+2} + 5$$

$$\Rightarrow y = 2 + \sqrt{2x+2} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{2x+2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 + \sqrt{2x+2} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x+2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

۳۰ گزینه ۱ چون دامنه توابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ باهم برابرند پس الزاماً $k = 1$ است (توجه شود که در $f(kx)$ طول تمامی نقاط در راستای محور x ها برابر $\frac{1}{k}$ می‌شود).

$$k = 2a^2 - a - 5 \xrightarrow{k=1} 2a^2 - a - 5 = 1 \Rightarrow$$

$$2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب مقادیر} = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$$

توجه شود که اگر بازه $[b, c]$ بازه‌ای متقارن نسبت به صفر باشد $k = -1$ نیز قابل قبول خواهد بود که به ازای این حالت، جواب در گزینه‌ها نیست.

۳۱ گزینه ۱

$$b \leq f(x) \leq c \xrightarrow{\times k} b = kb \leq kf(x) \leq ck = c$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow 1 = a^2 - 3a + 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ضرب مقادیر ممکن برای } a = 2 \times 1 = 2$$

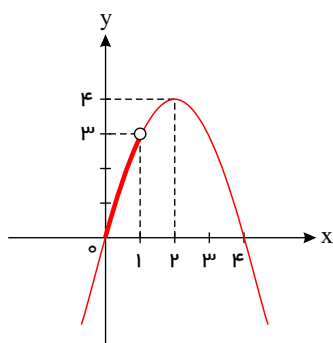
۳۲ گزینه ۲ روش اول:

می‌دانیم که $0 \leq u - [u] < 1$ است پس $0 \leq 2x - [2x] < 1$ است یعنی $0 \leq f(x) < 1$ است.

$$gof(x) = g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = -(f^2(x) - 4f(x)) = -((f(x) - 2)^2 - 4) = -(f(x) - 2)^2 + 4$$

$$\text{پس: } 0 \leq f(x) < 1 \rightarrow -2 \leq f(x) - 2 < -1 \rightarrow 1 < (f(x) - 2)^2 \leq 4 \rightarrow -1 > -(f(x) - 2)^2 \geq -4$$

$$\rightarrow 3 > -(f(x) - 2)^2 + 4 \geq 0 \rightarrow 0 \leq gof(x) < 3 \rightarrow R_{gof} = [3, 0)$$



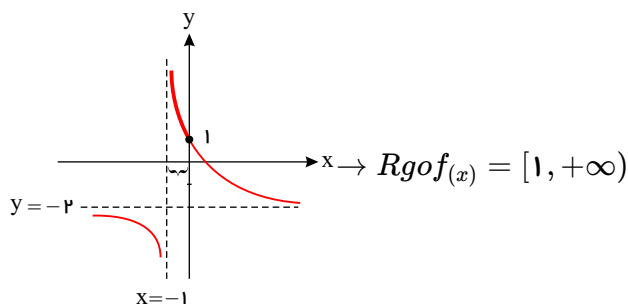
روش دوم: در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $2x - [2x]$ است که می‌دانیم $0 \leq 2x - [2x] < 1$ است کافی است

تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص کنیم وقتی $0 \leq x < 1$ است چه عرضی به ما می‌دهد.

۳۳ گزینه ۳

در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $[x] - x$ است که می‌دانیم $0 \leq [x] - x < 1$ است کافی است تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم وقتی

$0 \leq x < 1$ است چه عرضی به ما می‌دهد.



۳۴ گزینه ۳ ابتدا مقدار تابع داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$gof(-\frac{5}{3}) = g(f(-\frac{5}{3})) \Rightarrow f(-\frac{5}{3}) = 2[\frac{-5}{3}] - (-\frac{5}{3}) = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{7}{3}) = f([-\frac{7}{3} + f(-\frac{7}{3})]) \Rightarrow f(-\frac{7}{3}) = 2[-\frac{7}{3}] - (-\frac{7}{3}) = -6 + \frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{11}{3}) = f([-\frac{11}{3} - \frac{11}{3}]) = f(-6) = 2[-6] - (-6) = -12 + 6 = -6$$

۳۵ گزینه ۴

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3} - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)\right]\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4$$

۳۶ گزینه ۳ اگر f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند. آنگاه:

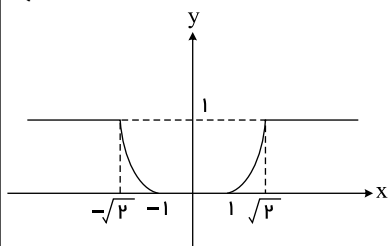
$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

$$f(g^{-1}(a)) = -3 \xrightarrow{f\left(\frac{1}{4}\right)=-3} g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = a$$

$$\Rightarrow -\left|\frac{1}{4}\right| \sqrt{\frac{1}{4}} = a \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

۳۷ گزینه ۴ ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x < -1 : g \circ f(x) = g(-1) = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 : g \circ f(x) = g(x) = 1 - x^2 \\ x > 1 : g \circ f(x) = g(1) = 0 \end{cases}$$



$$f \circ g = f(1 - x^2)$$

$$= \begin{cases} -1 & 1 - x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -1 \leq 1 - x^2 \leq x \Rightarrow 1 \geq x^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & 1 - x^2 > 1 \Rightarrow x^2 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$x < -\sqrt{2} \Rightarrow g \circ f(x) - f \circ g(x) = 0 - (-1) = 1, -\sqrt{2} \leq x < -1 \Rightarrow g \circ f(x) - f \circ g(x) = 0 - (1 - x^2) = x^2 - 1$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow g \circ f(x) - f \circ g(x) = 1 - x^2 - (1 - x^2) = 0, 1 < x \leq \sqrt{2} \Rightarrow g \circ f(x) - f \circ g(x) = 0 - (1 - x^2) = x^2 - 1$$

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow g \circ f(x) - f \circ g(x) = 0 - (-1) = 1$$

در نمودار $g \circ f - f \circ g$ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است.

۳۸ گزینه ۴

ابتدا ضابطه $g(x)$ را می‌یابیم.

$$f(x) = 2x, g \circ f(x) = 5x^2 + 11 \Rightarrow g(f(x)) = 5x^2 + 11 \Rightarrow g(2x) = 5x^2 + 11$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}x} g(2 \times \frac{1}{2}x) = 5(\frac{1}{2}x)^2 + 11 \Rightarrow g(x) = \frac{5}{4}x^2 + 11$$

حال تابع $g(x-7)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11$$

در تابع فوق به‌ازای $x=7$ ، کمترین مقدار تابع به دست می‌آید.

$$y_{\min} = g(7) = 0 + 11 = 11$$

۳۹ گزینه ۳ چون توابع f و $g \circ f$ روی محور y ها متقاطع‌اند، پس:

$$f(0) = g \circ f(0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 3 - \sqrt{a} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{4} = 2,25$$

۴۰ گزینه ۱

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(f(\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۴۱ گزینه ۳ چون f و g تابع ثابت هستند، در ضابطه داده‌شده برای آنها، ضریب x باید صفر باشد.

$$f(x) = b - 3ax \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = b$$

$$g(x) = c - (3b - 3)x \Rightarrow 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = c \end{cases}$$

$$f + g = 5 \Rightarrow 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow b \times c = 1 \times 4 = 4$$

۴۲ گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2 = abx - ax^2 + 2b - 2x - 7x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (-a - 7)x^2 + (ab - 2)x + 2b$$

چون f ، تابع ثابت است، پس داریم:

$$-a - 7 = 0 \Rightarrow a = -7, \quad ab - 2 = 0 \Rightarrow -7b - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{-2}{7}$$

$$f(x) = 2b = 2 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{4}{7}$$

۴۳ گزینه ۳ تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است، پس:

$$f(x) = mx^2 - nx - k = \text{ثابت} \Rightarrow m = n = 0, \quad f(x) = -k$$

مجموعه داده شده در صورتی تابع است که:

$$(\underbrace{m}_0, n - 1) = (0, k) \Rightarrow k = n - 1 = -1$$

$$\text{پس } f(x) = 1 \text{ و در نتیجه } f(\sqrt{5}) = 1.$$

۴۴ گزینه ۲

$$g(x) = k \quad f(x) = x$$

$$g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow k + 2(3+x) = 3 + 2x$$

$$\Rightarrow k + 6 = 3 \Rightarrow k = -3 \Rightarrow g(x) = -3$$

$$\frac{f(-1)}{g(4)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۴۵ گزینه ۳

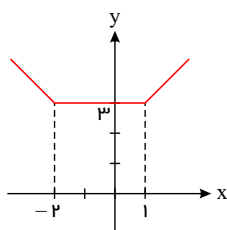
طبق فرض:

$$f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R}), \quad g(x) = x$$

$$f(2x) - g(1-x) = 4 + x \Rightarrow c - (1-x) = 4 + x \Rightarrow c = 5 \rightarrow f(x) = 5$$

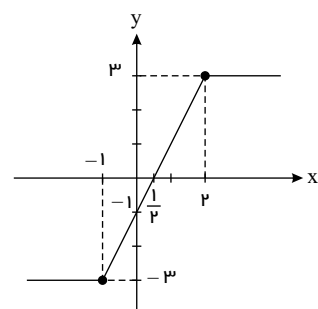
$$\Rightarrow g(-1)f(3) = -1 \times 5 = -5$$

۴۶ گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x = 1$ و $x = -2$ (ریشه های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً نزولی: $x < -2$

۴۷ گزینه ۳ تابع داده شده یک تابع سرسره ای (آبشاری) است که در $x = -1$ و $x = 2$ (ریشه های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً صعودی: $-1 < x < 2$

۴۸ گزینه ۴

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \underbrace{\sqrt{9 \cos^2 x - 1}}_t \leq 2 \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

$$f(x) = 2^t - 2^{-t}$$

تابع 2^t همواره صعودی است و تابع 2^{-t} همواره نزولی است پس تابع -2^{-t} نیز همواره صعودی است. پس می توان نتیجه گرفت تابع $f(x)$ یک تابع صعودی است.

$$t = -1 \Rightarrow 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right]$$

$$t = 2 \Rightarrow 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$$

توجه: اگر تابع پیوسته $f(x)$ در بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد آنگاه برد تابع برابر است با:

$$R_f = [f(a), f(b)]$$

۴۹ گزینه ۱ تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ زمانی اکیداً نزولی است که ضریب x^3 عددی منفی باشد، پس داریم:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow |k| < 3 \Rightarrow -3 < k < 3$$

$$k \text{ مقادیر صحیح } k: -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \text{مجموع} = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$$

۵۰ گزینه ۴ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(3) = 0$ است. پس داریم:

$$x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x > 3 \Rightarrow f(x) < f(3) \Rightarrow f(x) < 0$$

برای $x < 3$ ، تابع f ، مثبت و برای $x > 3$ ، تابع f ، منفی است. حال برای تعیین دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ باید نامعادله $x^2 f(x) \geq 0$ را حل کنیم که با تعیین علامت داریم:

x	$-\infty$	۰	۳	$+\infty$
x^2	+	○	+	+
$f(x)$	+	+	○	-
$x^2 f(x)$	+	○	+	-

$$x \leq 3 \Rightarrow D \cdot g = (-\infty, 3]$$

دامنه g شامل اعداد صحیح نامنفی ۰، ۱، ۲، ۳ است.

۵۱ گزینه ۲

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6| = |x+1| - |3x-6|$$

با توجه به ریشه های داخل قدر مطلق ها یعنی $x = 2$ و $x = -1$ محدوده های زیر را در نظر می گیریم:

$$x < -1 \Rightarrow y = -(x+1) + 3x - 6 = 2x - 7$$

$$-1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x + 1 + 3x - 6 = 4x - 5$$

$$x \geq 2 \Rightarrow y = x + 1 - (3x - 6) = -2x + 7$$

در محدوده $x \geq 2$ تابع نزولی است و داریم:

$$x \geq 2 \Rightarrow -2x \leq -4 \rightarrow -2x + 7 \leq -4 + 7 \Rightarrow y \leq 3$$

$$y = -2x + 7 \Rightarrow 2x = -y + 7 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$$

$$\text{تابع وارون: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}; x \leq 3$$

۵۲ گزینه ۱ طبق فرض، دامنه f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، پس:

$$\begin{cases} m^2 - m - 5 < 0 \rightarrow \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad (I) \\ -m^2 + 2m - 3 < 0 \rightarrow \Delta = 4 - 12 < 0 \Rightarrow \text{(همواره برقرار)} \end{cases}$$

$$\text{اکیداً نزولی} \rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \quad \text{از طرفی } f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$$

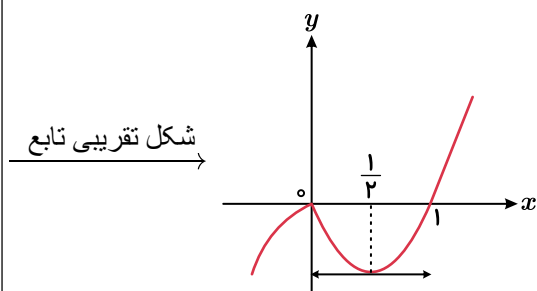
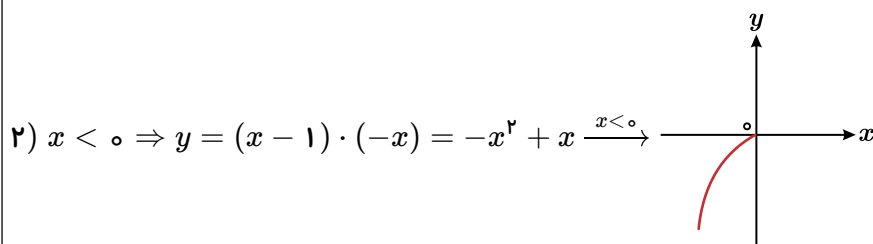
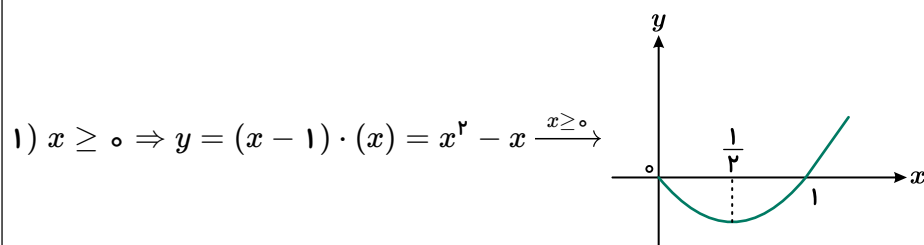
$$\Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Rightarrow (2m + 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow (m < -\frac{1}{2}) \cup (m > 2) \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I), (II)}} \left(\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(2, \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -1$$

m فقط یک مقدار صحیح را می‌تواند بپذیرد.

۵۳ گزینه ۲ در توابع قدرمطلق، سریع‌ترین روش برای بررسی یکنوایی تابع، رسم آن است. چون قدرمطلق است ابتدا تابع را تعیین علامت و سپس رسم می‌کنیم.

$$\text{ریشه قدرمطلق } 0, x = 0, y = (x - 1) \cdot |x|$$

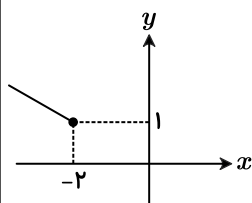


$$\xrightarrow{0 < x < 1} y = (x - 1)x = x^2 - x \Rightarrow y' = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بازۀ نزولی
با توجه به شکل

$$\xrightarrow{(a, b) = (0, \frac{1}{2})} a + b = \frac{1}{2}$$

۵۴ گزینه ۴ ضابطه اول تابع طبق شکل نزولی است؛ پس باید ضابطه دوم نیز نزولی باشد و بنابراین باید $m > 0$ باشد تا شیب خط منفی شود. از طرفی چون برد ضابطه اول $(-\infty, 1]$ است؛ پس باید برد ضابطه دوم $(-\infty, 1]$ یا زیرمجموعه‌ای از آن باشد تا تابع f نزولی شود.



$$\begin{aligned} x > -2 &\Rightarrow mx > -2m \Rightarrow -mx < 2m \\ \Rightarrow 5m - mx < 5m + 2m &\Rightarrow 5m - 5x < 7m \\ \xrightarrow{\text{برد ضابطه دوم}} R_2 &= (-\infty, 7m) \Rightarrow \text{باید } 7m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{7} \end{aligned}$$

توجه شود که در حالت خاص $m = 0$ برد ضابطه دوم مجموعه تک‌عضوی $\{0\}$ است که در این حالت نیز تابع f نزولی خواهد بود؛ پس مجموعه مقادیر قابل قبول برای m به صورت $[0, \frac{1}{7}]$ است که در این صورت داریم:

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{7} \Rightarrow a + b = \frac{1}{7}$$

راه حل دوم: با توجه به اینکه در ضابطه اول $x \leq 2$ است، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \rightarrow x \leq -2 \\ 5m - mx & \rightarrow x > -2 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$-x - 1 \geq 1$$

پس با توجه به نزولی بودن تابع برای مقادیر $x > -2$ باید داشته باشیم:

$$5m - mx \leq 1$$

از طرفی نزولی بودن ایجاب می‌کند که $(5m - mx)' < 0$ باشد؛ پس $(I) \quad -m < 0 \Rightarrow m > 0$ اکنون:

$$x > -2 \Rightarrow -mx < 2m \Rightarrow 5m - mx < 7m \Rightarrow 7m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{7} \quad (II)$$

از (I) و (II) نتیجه می‌گیریم که:

$$m \in (0, \frac{1}{7}]$$

از طرفی اگر $m = 0$ باشد، داریم: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & ; x \leq -2 \\ 0 & ; x > -2 \end{cases}$ که همچنان نزولی است؛ پس $[a, b] = [0, \frac{1}{7}]$ که نتیجه می‌دهد

$$a + b = \frac{1}{7}$$

۵۵ گزینه ۳

$$\begin{cases} 4 - m \geq 2m + 3 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3} \\ 2m + 3 \geq m - 2 \Rightarrow m \geq -5 \\ m - 2 \geq -10 \Rightarrow m \geq -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -5 \leq m \leq \frac{1}{3} \Rightarrow m = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

۵۶ گزینه ۲ تابع f صعودی است:

$$\begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow 3m - 2 < 10 - m \Rightarrow m \leq 3 \\ 0 < 1 \Rightarrow 10 - m < 4m + 13 \Rightarrow m \geq \frac{-3}{5} \\ 1 < 2 \Rightarrow 4m + 13 < 25 \Rightarrow m \leq 3 \end{cases}$$

۳ مقدار مطلوب موجود است. $\xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \frac{-3}{5} \leq m \leq 3$ اشتراک در جواب

۵۷ گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را بر حسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4 \Rightarrow (x - 1)^2 = y + 4$$

جای x و y را عوض می‌کنیم. $\xrightarrow{x \geq 1} x - 1 = \sqrt{y + 4} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y + 4} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 4}$

حال با خط $g(x) = \frac{x - a}{2}$ قطع می‌دهیم:

بررسی گزینه‌ها $\xrightarrow{x = 21} f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \sqrt{x + 4} = \frac{x - 9}{2} \rightarrow x = 21$

توجه کنید حل معادله آخر بدین صورت است:

توان $\xrightarrow{2} 2\sqrt{x + 4} = x - 11 \rightarrow 4x + 16 = x^2 + 121 - 22x \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$

قق $\Rightarrow (x - 21)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 21 \\ x = 5 \end{cases}$ غقق (در معادله صدق نمی‌کند)

۵۸ گزینه ۱

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$g \circ f^{-1}(x) : \begin{cases} g(f^{-1}(2)) = g(1) = \emptyset \\ g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \\ g(f^{-1}(4)) = g(3) = 1 \\ g(f^{-1}(6)) = g(4) = 2 \end{cases} \rightarrow g \circ f^{-1}(x) = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

پس: $\frac{g(x)}{g \circ f^{-1}(x)} = \{(4, \frac{2}{1}), (5, \frac{6}{3})\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$

۵۹ گزینه ۴

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \rightarrow g^{-1}\{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$g^{-1} \circ f(x) : \begin{cases} g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(2) = 4 \\ g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(5) = \emptyset \\ g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = \emptyset \\ g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(6) = 5 \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$\begin{cases} g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\} \\ f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\{2, -1\}$ است.

۶۰ گزینه ۳ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است. سؤال در حقیقت $f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$ را خواسته است.

$$\begin{aligned} f^{-1}(6) = a &\rightarrow f(a) = 6 \rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4 \\ f^{-1}(12) = b &\rightarrow f(b) = 12 \rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \rightarrow b = 9 \rightarrow a + b = 13 \end{aligned}$$

۶۱ گزینه ۲ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیه چهارم $(y = -x)$ را با کدام طول قطع می‌کند باید معادله $f^{-1}(x) = -x$ را حل کنیم.

$$f^{-1}(x) = -x \rightarrow f(-x) = x \rightarrow -x - \frac{2}{-x} = x \rightarrow \frac{2}{x} = 2x \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = -1 \text{ غ ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیه چهارم، $x > 0$ است.

۶۲ گزینه ۴ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y و ۲ بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2} \rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A + \frac{1}{A} = 4$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 + 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ A = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\log_b^a c \rightarrow a = b^c$ است.

$$A = 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2^{2+\sqrt{3}}$$

$$A = 2 - \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2^{2-\sqrt{3}} \text{ غ ق}$$

توجه کنید که $\log_2^{2-\sqrt{3}}$ تقریباً معادل $\log_2^{2/3}$ است که حتماً مقدار آن منفی است و چون دامنه تابع شده بزرگتر مساوی صفر است بنابراین برد تابع معکوس نمی‌تواند منفی باشد.

۶۳ گزینه ۳ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است. سؤال در حقیقت $f^{-1}(15) + f^{-1}(3)$ را خواسته است.

$$\begin{aligned} f^{-1}(3) = a &\rightarrow f(a) = 3 \rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \rightarrow a = 1 \\ f^{-1}(15) = b &\rightarrow f(b) = 15 \rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \rightarrow b = 9 \rightarrow a + b = 10 \end{aligned}$$

۶۴ گزینه ۴ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیه دوم $(y = -x)$ را با کدام طول قطع می‌کند باید معادله $f^{-1}(x) = -x$ را حل کنیم.

$$f^{-1}(x) = -x \rightarrow f(-x) = x \rightarrow -x - \frac{1}{-2x} = x \rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \rightarrow 4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ غ ق} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیه دوم، $x < 0$ است.

۶۵ گزینه ۳ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y ، ۲ بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A - \frac{1}{A} = 4 \xrightarrow{\times A} A^2 - 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 16 + 4 = 20 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ A = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\log_b^a = c \rightarrow a = b^c$ است.

$$A = 2 + \sqrt{5} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \rightarrow x = \log_2^{2+\sqrt{5}}$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \rightarrow 2^x = \underbrace{2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}} \quad \text{امکان ندارد}$$

۶۶ گزینه ۲ تابع در واقع $y = \sqrt{x}$ است که سه واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال یافته است. این تابع اکیداً صعودی است. می‌دانیم محل تقاطع یک تابع صعودی و معکوسش روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y = x$ خواهد بود، پس کافی است تابع را با $y = x$ در یک دستگاه حل کنیم تا محل تقاطع حاصل شود.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+3} - 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x + 1 \xrightarrow{x > -1} x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$$|OA| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

۶۷ گزینه ۳ تابع اکیداً صعودی است؛ پس منحنی وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند؛ بنابراین منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x+3}} + k$ وارون خود را در نقطه $(1, 1)$ قطع می‌کند و این نقطه روی تابع نیز صدق می‌کند.

$$1 = \sqrt{1+3} + k \Rightarrow k = -1$$

بنابراین نمودار یک واحد به پایین منتقل شده است. این منحنی را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:

$$y = -\sqrt{\sqrt{x+3}} + 1$$

حال نمودار را ۴ واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y = -\sqrt{\sqrt{x+4}} + 3 + 1$$

نقطه $(0, 1 - \sqrt{5})$ روی این منحنی قرار دارد.

۶۸ گزینه ۲ می‌دانیم اگر نقطه $A(a, b)$ متعلق به تابع f باشد، آنگاه نقطه $A'(b, a)$ متعلق به تابع f^{-1} است و بالعکس. پس گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

$$\text{نادرست } 1 \Rightarrow (-1, -2) \Rightarrow (-2, -1) \Rightarrow f(-2) = -8 + 2 + 1 = -5$$

$$\text{درست } \frac{5}{8} \Rightarrow (\frac{1}{8}, \frac{5}{8}) \Rightarrow (\frac{1}{8}, \frac{5}{8}) \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{1 - 4 + 8}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\text{نادرست } 7 \Rightarrow (1, 2) \Rightarrow (2, 1) \Rightarrow f(2) = 8 - 2 + 1 = 7$$

$$\text{نادرست } \frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8}) \Rightarrow (-\frac{11}{8}, -\frac{1}{2}) \Rightarrow f(-\frac{11}{8}) \neq -\frac{1}{2}$$

۶۹ گزینه ۴

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x|$$

تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot x = x^3 & x \geq 0 \\ x^2(-x) = -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

مشخص است که تابع f برای $x \leq 0$ ، نزولی است و داریم:

$$x \leq 0 \Rightarrow x^3 \leq 0 \Rightarrow -x^3 \geq 0 \Rightarrow f(a) \geq 0 \Rightarrow \text{برد: } [0, +\infty)$$

$$y = -x^3 \Rightarrow x^3 = -y \Rightarrow x = \sqrt[3]{-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}, x \geq 0$$

۷۰. گزینه ۱ نقطه $A(a, b)$ بر روی تابع قرار دارد اگر و فقط اگر نقطه $A'(b, a)$ روی وارون تابع قرار داشته باشد، بنابراین جواب گزینه ۱ است، زیرا:

$$y = -3x^3 + 2x - 11$$

$$(9, -2) \rightarrow (-2, 9) \Rightarrow 9 = -3(-8) - 4 - 11 = 24 - 15 = 9$$

۷۱. گزینه ۳ تابع $y = x^3 + 3x - 12$ اکیداً صعودی است. پس نقطه برخورد تابع و وارون آن بر روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y = x$ قرار دارد.

پس باید تابع را با $y = x$ قطع بدهیم.

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x - 12 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

$x = 2$ در معادله فوق صدق می‌کند، پس داریم:

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2, 2) \Rightarrow OA = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

۷۲. گزینه ۳ ضابطه تابع g که وارون تابع f است را می‌یابیم:

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} \Rightarrow y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y} + 1)^2$$

$$\Rightarrow g(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

۷۳. گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow R_f = [-\frac{13}{2}, \infty) \\ 2 + 2mx - x^2 & x > -\frac{3}{2} \Rightarrow 2 + 2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{9}{4} - 3m \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{13}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow -3m \leq \frac{27}{4} \Rightarrow m \geq -\frac{9}{4} \quad (1)$$

$$x = m \Rightarrow 2 + 2m^2 - m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 + 2 < \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow m^2 < \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} < m < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m = -2$$

$$f^{-1}(-19) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -19$$

$$\Rightarrow 2 - 4\alpha - \alpha^2 = -19 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 21 = 0 \Rightarrow (\alpha + 7)(\alpha - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 & \text{ق ق} \\ \alpha = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۷۴ گزینه ۴ نقطه تلاقی تابع $y = f^{-1}(x)$ و خط $y = 12 - x$ ، نقطه‌ای به عرض ۱۰ است، پس:

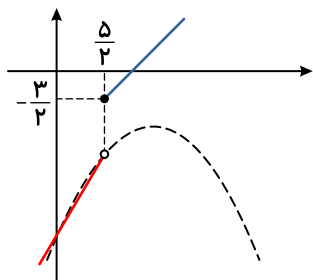
$$\begin{cases} 10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \\ 10 = f^{-1}(x) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(2) = 10 \Rightarrow f(10) = 2(*)$$

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{mx} - 1} \xrightarrow{(*)} \sqrt{10 - 2\sqrt{10m} - 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow 10m - 1 = 9 \Rightarrow m = 1$$

در نتیجه خواسته سؤال $f(5)$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5} - 1} = \sqrt{5 - 4} = 1$$

۷۵ گزینه ۱ توابع یک‌به‌یک وارون‌پذیر هستند. از طرفی طول رأس تابع درجه ۲ باید بعد از $x = \frac{5}{2}$ باشد تا یک‌به‌یک شود.



$$x_A = -\frac{b'}{2a'} > \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{a}{-4} > \frac{5}{2} \Rightarrow a > 10 \quad (1)$$

$$-2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}a - 21 < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}a < 32 + \frac{5}{4} \Rightarrow a < 13.3 \xrightarrow{(1)} a_{max} = 13$$

$$f^{-1}(-3) = a \Rightarrow f(a) = -3 \Rightarrow -2a^2 + 13a - 21 = -3 \Rightarrow 2a^2 - 13a + 18 = 0 \xrightarrow{a < \frac{5}{2}} \begin{cases} x = 2 \\ x = 4.5 \end{cases}$$

۷۶ گزینه ۲ ابتدا عرض نقطه برخورد را در خط قرار داده تا طول نقطه برخورد به دست آید: $y = 1 \xrightarrow{\text{خط}} x = 20$

خط از نقطه $(20, 1)$ می‌گذرد، پس وارون تابع هم از این نقطه می‌گذرد، در نتیجه تابع f از نقطه $(1, 20)$ عبور می‌کند.

$$\Rightarrow f(1) = a + 8 = 20 \Rightarrow a = 12$$

توجه: اگر f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند آنگاه:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

۷۷ گزینه ۳ هرگاه f و f^{-1} وارون یکدیگر باشند آنگاه $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ عدد فرضی $x = 3$ را در تابع قرار می‌دهیم، داریم:

$$f(x) = y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \Rightarrow f(3) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در وارون}} 3 = \frac{a}{4} + a\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{3a}{4} \Rightarrow a = 4$$

۷۸ گزینه ۳ چون نقطه $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5}\right)$ روی تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x}{a+a|x|}$ قرار دارد پس نقطه $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{8}\right)$ روی تابع f خواهد بود یعنی باید

داشته باشیم:

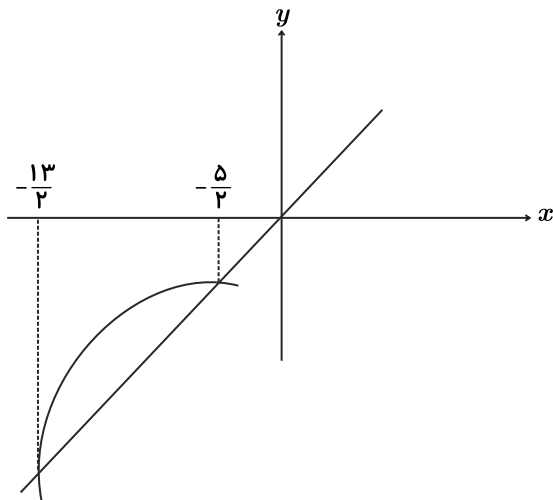
$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{-\frac{3}{5}}{a + a\left(\frac{3}{5}\right)} = -\frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{3}{8a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = 3$$

۷۹ گزینه ۳ چون نمودار تابع f^{-1} قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y = x$ است؛ پس نمودار f^{-1} به صورت زیر خواهد بود و طبق شکل در بازه

$\left[-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}\right]$ همواره منفی است و بنابراین باید $x - f^{-1}(x) < 0$ باشد یعنی باید $f^{-1}(x) > x$ باشد که طبق شکل در بازه $\left(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ شرط

$f^{-1}(x) > x$ برقرار است. پس $D_f = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ است که تعداد اعداد صحیح در این بازه ۴ عدد است که عبارتند از $\{-6, -5, -4, -3\}$



۸۰ گزینه ۲ نمودار $f^{-1}(x)$ با قرینه کردن نمودار $f(x)$ نسبت به خط $y = x$ به دست می آید. با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} f(x) > x & ; & x < -\sqrt{30} \\ f(x) < x & ; & x > -\sqrt{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) < x & ; & x < -\sqrt{30} \\ f^{-1}(x) > x & ; & x > -\sqrt{30} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + f^{-1}(x) < 0 & ; & x < -\sqrt{30} \\ -x + f^{-1}(x) > 0 & ; & x > -\sqrt{30} \end{cases}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. با توجه به علامت صورت و مخرج کسر داریم:

x	$-\sqrt{30}$		
$f(x)$	-	-	
$-x + f^{-1}(x)$	+	+	$\Rightarrow y \text{ دامنه } = (-\infty, -\sqrt{30})$
y	+	-	$\Rightarrow$ دامنه شامل بی شمار عدد صحیح است.

۸۱ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{ax}{1 + |x|}, \quad f(-1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-a}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

۸۲ گزینه ۳ چون وارون تابع $y = x - 4$ را در نقطه $(a, -1)$ قطع می کند؛ پس تابع $y = x + 4$ (وارون تابع $y = x - 4$) را در نقطه

$(-1, a)$ قطع می کند؛ بنابراین باید مختصات نقطه $(-1, a)$ هم در معادله خط $y = x + 4$ و هم در معادله تابع y صدق کند، یعنی داریم:

$$(-1, a) \xrightarrow{y=x+4} a = -1 + 4 \Rightarrow a = 3$$

$$(-1, a) = (-1, 3) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در تابع}} 3 = 1 + \sqrt{b+3} \Rightarrow \sqrt{b+3} = 2$$

$$\Rightarrow b+3=4 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a-b=2$$

۸۳ گزینه ۴ باید مختصات نقطه $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ و همچنین نقطه $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ در معادله تابع y صدق کند.

$$\begin{cases} f(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5} = -\sqrt{a + \frac{9}{25}b} \\ f(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{3}{5} = -\sqrt{a + \frac{16}{25}b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a + \frac{9}{25}b} = \frac{4}{5} \Rightarrow a + \frac{9}{25}b = \frac{16}{25} \\ \sqrt{a + \frac{16}{25}b} = \frac{3}{5} \Rightarrow a + \frac{16}{25}b = \frac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow b = -1, a = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۸۴ گزینه ۳ طبق فرض مسئله:

$$f(0,6) = 0,8, f(0,8) = 0,6$$

$$\begin{cases} \sqrt{a + 0,36b} = 0,8 \\ \sqrt{a + 0,64b} = 0,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 0,36b = 0,64 \\ a + 0,64b = 0,36 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم}} -0,28b = 0,28 \Rightarrow b =$$

$$-1 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow ab = (1)(-1) = -1$$

۸۵ گزینه ۱

$$D_{f \circ g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

ابتدا f^{-1} را می‌نویسیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

و سپس $g \circ f^{-1}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

حال زوج مرتب $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(5, 2), (4, 2)\}$$

۸۶ گزینه ۴

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}, \quad \text{quad} \quad g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$g^{-1} \circ f - f = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\} \Rightarrow \text{برد} = \{2, -1\}$$

۸۷ گزینه ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda))$$

برای محاسبه $f^{-1}(\lambda)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{2}{5}x - 4 \rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30$$

$$\text{پس: } g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}(30)$$

برای محاسبه $g^{-1}(30)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$30 = x^3 + x \rightarrow x = 3$$

می‌دانیم که $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ است گزینه ۱

۸۸

توجه کنید:

$$f^{-1}(20) = a \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

$$g^{-1}(16) = b \Rightarrow g(b) = \frac{9b+6}{1-b} = 16 \Rightarrow b = \frac{2}{5}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(20) = g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

۸۹ گزینه ۴ می‌دانیم که $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1} \circ g^{-1}(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(21) = 6$$

توجه کنید:

$$g^{-1}(-9) = a \Rightarrow g(a) = -9 \Rightarrow \frac{3-a}{2} = -9 \Rightarrow 3-a = -18 \Rightarrow a = 21$$

$$f^{-1}(21) = b \Rightarrow f(b) = 21 \Rightarrow b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \Rightarrow (b-6)(b+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -2 \end{cases} \text{ غ ق (با توجه به دامنه)}$$

۹۰ گزینه ۲ هر کدام از عبارات $gog(0)$ و $gof^{-1}(-2)$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مقادیر مشخص شده روی نمودارها، داریم:

$$gog(0) = g(g(0)) = g(2) = 3$$

f تابع خطی گذرنده از دو نقطه $(0, -3)$ و $(2, 0)$ است.

$$\text{شیب} = \frac{0 - (-3)}{2 - 0} = \frac{3}{2} \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{2}(x - 2) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$f^{-1}(-2) = k \Rightarrow f(k) = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}k - 3 = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g \circ f^{-1}(-2) = g(f^{-1}(-2)) = g\left(\frac{2}{3}\right)$$

برای $a \leq 1$ ، تابع خطی گذرنده از نقاط $(1, 1)$ و $(0, 2)$ است.

$$\text{شیب} = \frac{2-1}{0-1} = -1 \Rightarrow y-2 = -1(x-0) \Rightarrow y = -x+2$$

$$x \leq 1 \Rightarrow g(x) = -x+2 \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3}$$

خواسته سؤال برابر است با:

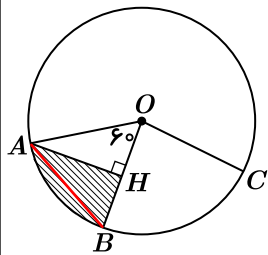
$$g \circ f^{-1}(-2) \times g \circ g(0) = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

۹۱ گزینه ۱

$$(g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \\ f(x) = 2\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{x} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف طول نقاط} = 2 - 1 = 1$$

۹۲ گزینه ۴



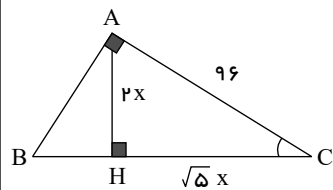
$$P = 2\pi r \Rightarrow 2\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 1, OH = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \angle OAH = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$$

$$OA = OB = AB = 1 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \widehat{AB} = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\widehat{AH} + \widehat{BH} + \widehat{AB}) - (OA + OH + AH) = \widehat{AB} - OA = \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi - 3}{3}$$

۹۳

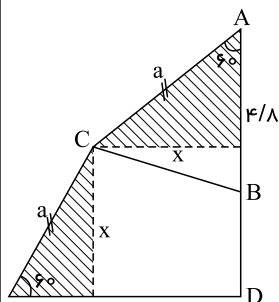
$$\text{گزینه ۳ چون } \cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ است می توان } CH = \sqrt{5}x \text{ و } AH = 2x \text{ را در نظر گرفت.}$$



$$\triangle AHC : (96)^2 = (2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 \rightarrow 96 \times 96 = 4x^2 + 5x^2 \rightarrow 96 \times 96 = 9x^2 \rightarrow x^2 = 32 \times 32 \rightarrow x = 32$$

$$\rightarrow AH = 2x = 64$$

۹۴ گزینه ۲ طبق مساحت سینوسی مثلث ABC داریم:

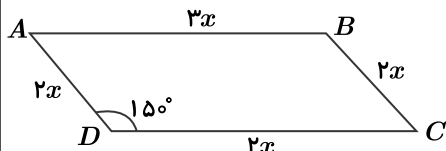


$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2}a \times 4,8 \times \sin 60^\circ \\ S_{ABC} = 7,2\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow 1,2a\sqrt{3} = 7,2\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$$

دو مثلث قائم الزاویه هاشورخورده با هم هم نهشت اند و داریم $x = a \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ پس CD قطر مربعی به ضلع $3\sqrt{3}$ است و در نتیجه:

$$CD = 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

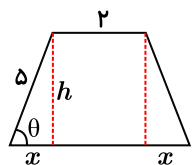
۹۵ گزینه ۴



$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = 2x \times 3x \times \sin 150^\circ = 54 \Rightarrow 6x^2 \times \frac{1}{2} = 54$$

$$x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{محیط متوازی الاضلاع} = 10x = 30\sqrt{2}$$

۹۶ گزینه ۲ چون مقدار $\cos \theta$ مثبت است، پس θ زاویه حاده است.



$$S = \frac{[2 + (2 + 2x)] \times h}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{5} = 0,6 \Rightarrow x = 3$$

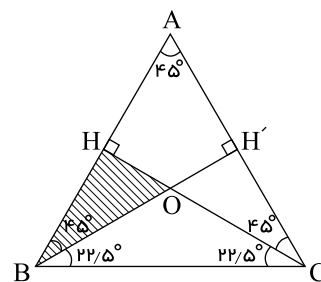
$$\sin \theta = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8 \Rightarrow \frac{h}{5} = 0,8 \Rightarrow h = 4$$

$$\Rightarrow S = \frac{(2 + 8) \times 4}{2} = 20$$

۹۷ گزینه ۴

$$\Delta AH'B : \sin 45^\circ = \frac{AH'}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH'}{8} \rightarrow AH' = 4\sqrt{2}$$

$$\rightarrow AH = 4\sqrt{2} \rightarrow BH = 8 - 4\sqrt{2}$$



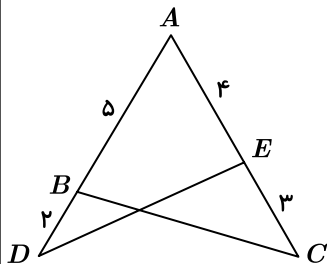
مثلث OHB به خاطر داشتن دو زاویه 45° متساوی الساقین است، پس: $OH = BH = 8 - 4\sqrt{2}$

$$S_{\Delta OBH} = \frac{BH \times OH}{2} = \frac{(8 - 4\sqrt{2})(8 - 4\sqrt{2})}{2} = \frac{(4(2 - \sqrt{2}))(4(2 - \sqrt{2}))}{2} = 8(2 - \sqrt{2})^2$$

$$= 8(4 + 2 - 4\sqrt{2}) = 8(6 - 4\sqrt{2}) = 16(3 - 2\sqrt{2})$$

این جواب در گزینه ها نیست پس عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم می کنیم:

$$16(3 - 2\sqrt{2}) \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = 16 \left(\frac{9 - 8}{3 + 2\sqrt{2}} \right) = \frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$$



$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} &= 1,75 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin \hat{A} - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \hat{A} &= 1,75 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin \hat{A} - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \hat{A} &= \frac{7}{4} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin \hat{A} &= \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{6} \\
 \Rightarrow \tan \hat{A} &= \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

۹۹ گزینه ۳ هر کدام از نسبت های مثلثاتی داده شده را حساب می کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{-\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{-17\pi}{6}) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{19\pi}{4} = \tan(5\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin(\frac{-11\pi}{6}) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{-\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خواسته سؤال به صورت زیر است:

$$\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(\frac{-11\pi}{6}) = (\frac{-\sqrt{3}}{2})(\frac{-\sqrt{3}}{2}) + (-1)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱۰۰ گزینه ۲ زاویه ها را شکسته و بر حسب $\frac{\pi}{4}$ می نویسیم.

$$A = \tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$$

$$\tan(\frac{11\pi}{4}) = \tan(\frac{12\pi - \pi}{4}) = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin(\frac{15\pi}{4}) = \sin(\frac{16\pi - \pi}{4}) = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{13\pi}{4}) = \cos(\frac{12\pi + \pi}{4}) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۱۰۱ گزینه ۲

$$\begin{aligned} \tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} &= \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\tan \frac{\pi}{6}\right) \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \tan \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

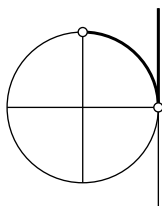
۱۰۲ گزینه ۱ زاویه $x - \frac{\pi}{4}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} > -x > -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} - x > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = \frac{\pi}{4} - x$ داریم:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \tan \alpha = \frac{1-m}{2+m}$$

از روی دایرهٔ مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $\tan \alpha > 0$ پس داریم:



$$\frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow \frac{-c|ccccm}{\frac{1-m}{2+m} \quad - \quad \text{تن} \quad + \quad 0 \quad -} \quad -2 < m < 1 \Rightarrow m \in (-2, 1)$$

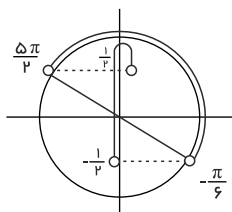
۱۰۳ گزینه ۲ ابتدا حدود x را می‌یابیم:

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{12}$$

با فرض $2x = \alpha$ و استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin \alpha = \frac{m-1}{4}, -\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{12}$$

طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{12}$ ، $\sin \alpha$ از $-\frac{1}{2}$ تا 1 افزایش یافته و سپس تا $\frac{1}{2}$ کاهش می‌یابد، بنابراین در کل داریم:



$$-\frac{1}{2} < \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \xrightarrow{+1} -1 < m \leq 5 \Rightarrow m \in (-1, 5]$$

۱۰۴ گزینه ۴ شیب خط داده شده به صورت $\frac{-2m}{m^2-1}$ می‌شود که باید برابر $\tan 60^\circ$ باشد، پس:

$$\frac{-2m}{m^2 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}m^2 + 2m - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow |m_1 - m_2| = \frac{2\sqrt{16}}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

۱۰۵ گزینه ۳

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\pi < 4x < 4\pi \Rightarrow \frac{3}{4}\pi < x < \pi \Rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + \frac{1}{3}) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{-\frac{4}{9}\sqrt{3}} = \frac{-9}{4\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -0.75\sqrt{3}$$

۱۰۶ گزینه ۱

$$\tan x + \cot x = 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos x \sin x} = 4 \Rightarrow \cos x \sin x = \frac{1}{4},$$

$$5\pi < 4x < 6\pi \xrightarrow{\div 4} \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < \cos x < 0 \rightarrow \sin x - \cos x < 0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1)} \sin x - \cos x = -\sqrt{1 - 2 \cos x \sin x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin x - \cos x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x \sin x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x} = -0.8\sqrt{2}$$

۱۰۷ گزینه ۲ می‌دانیم:

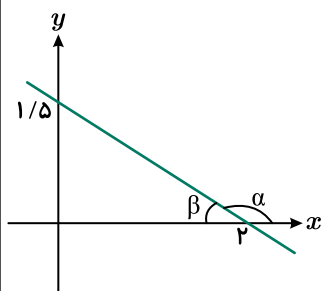
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$T = 3 \cos 4x + \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 \cos 4x + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{12}} T = 3 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} -$$

$$1 = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

۱۰۸ گزینه ۴ می‌دانیم:



$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \tan \beta = \frac{1/5}{3/4} = \frac{4}{15} \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = -\tan \beta = -\frac{4}{15}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = -\frac{4}{15}$$

۱۰۹ گزینه ۴ با فرض $\alpha = 68^\circ$ داریم:

$$248 = 180 + 68, \quad 158 = 90 + 68$$

$$202 = 270 - 68, \quad 292 = 360 - 68$$

$$\frac{3 \cos(\pi + \alpha) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha}{-\cos \alpha - \cos \alpha} = \frac{-5 \cos \alpha}{-2 \cos \alpha} = 2.5$$

۱۱۰ گزینه ۲

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که $\cos \alpha < 0$ باشد؛ زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{-\cos \alpha}$$

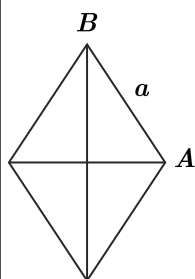
$$\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \frac{-1}{\cot \alpha} \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha < 0 \text{ باید}$$

با توجه به اینکه باید $\cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha < 0$ باشد پس α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است.

۱۱۱ گزینه ۱ اگر طول قطرهای کوچک و بزرگ لوزی را به ترتیب x و y فرض کنیم خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2}xy \Rightarrow xy = 2S$$



اگر طول ضلع لوزی را a فرض کنیم خواهیم داشت:

$$a = \sqrt{2S} \Rightarrow a^2 = 2S$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = S$$

از طرفی مساحت لوزی برابر است با $S = a \times a \times \sin \hat{\beta}$ ؛ پس خواهیم داشت:

$$\frac{a^2}{2} = a \times a \times \sin \hat{\beta} \Rightarrow \sin \hat{\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6}$$

چون مقدار مثبت $\tan(\frac{A-B}{2})$ مورد نظر است پس باید $\hat{A} = \frac{5\pi}{6}$ و $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ باشد یعنی داریم:

$$\tan(\frac{A-B}{2}) = \tan(\frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

۱۱۲ گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

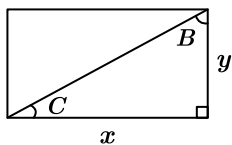
$$\text{طرف چپ} = \frac{1}{|\cos \alpha|} - \tan \alpha = \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

بنابراین $\cos \alpha$ باید مثبت باشد، در نتیجه α در ناحیه اول یا چهارم قرار دارد.

$$-\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} = -\frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|}$$

در صورتی کسر بالا برابر $\cot \alpha$ است که $\sin \alpha < 0$ باشد. پس α در ناحیه سوم یا چهارم قرار دارد. از اشتراک دو جواب نتیجه می گیریم که α در ناحیه چهارم قرار دارد.

۱۱۳ گزینه ۴



قطر مستطیل

$$\tan \hat{B} = \frac{x}{y}, \tan \hat{C} = \frac{y}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \text{قطر مستطیل} \times \frac{1}{2} = \text{جزء مساحت}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow xy = \frac{1}{4} (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4xy \star$$

$$\tan(\widehat{B} - \widehat{C}) = \frac{\tan \widehat{B} - \tan \widehat{C}}{1 + \tan \widehat{B} \tan \widehat{C}} = \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \times \frac{x}{y}} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{xy}}{2} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$\xrightarrow{*} x^2 + y^2 + 2xy = 6xy \Rightarrow (x + y)^2 = 6xy \Rightarrow x + y = \sqrt{6xy}$$

$$\xrightarrow{*} x^2 + y^2 - 2xy = 2xy \Rightarrow (x - y)^2 = 2xy \Rightarrow x - y = \sqrt{2xy}$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \sqrt{2xy} \times \sqrt{6xy} = \sqrt{12xy}$$

$$\tan(\widehat{B} - \widehat{C}) = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{\sqrt{12xy}}{2xy} = \sqrt{3}$$

۱۱۴ گزینه ۴

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

$$2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha < 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \left(\underbrace{1 - \cos \alpha}_{\text{همواره مثبت} (\cos \alpha < 1)} \right) < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

چون $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha < 0$ پس α در ربع چهارم قرار دارد.

۱۱۵ گزینه ۴ می‌دانیم که $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و چون $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ است، انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است و داریم:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{\underbrace{|\cos x|}_{-}} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x)$$

$$= -\cos x$$

۱۱۶ گزینه ۱ می‌دانیم که $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است، انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و داریم:

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\underbrace{|\cos x|}_{-}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$$

$$= -\cos^2 x$$

۱۱۷ گزینه ۴

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3,75$$

۱۱۸ گزینه ۱ روش اول:

$$f(x) = 32 (\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2$$

عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = 32 \left(\frac{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

$$f(x) = 32 \left(\frac{1}{32} \frac{\sin 32x}{\sin x} \right)^2 = \frac{\sin^2 32x}{32 \sin^2 x} = \frac{\sin^2 32x}{16(1 - \cos 2x)}$$

در عبارت قبلی از اتحادهای $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ و $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ استفاده کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} \text{پس داریم: } f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{8\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32} \end{aligned}$$

روش دوم: می‌توانیم $\cos 15^\circ$ را ابتدا محاسبه کرده و سپس در صورت سؤال قرار دهیم: $\left(\frac{\pi}{12} = 15^\circ\right)$

$$\text{می‌دانیم: } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{پس داریم: } f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 32 \cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ \cos^2 120^\circ \cos^2 240^\circ = 32 \times \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

۱۱۹ گزینه ۳ ابتدا صورت عبارت را کمی ساده کنیم، می‌دانیم $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ و $\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ داریم:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{9}{4} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4}$$

حاصل عبارت موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\left|\frac{5}{4} - 1\right|} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

۱۲۰ گزینه ۳ طرفین $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم و از رابطه $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{3}(1 + \tan^2 x)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 6 \tan^2 x + 3 = 4 + 4 \tan^2 x \Rightarrow 2 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

روش دوم: از روابط $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

۱۲۱ گزینه ۲ با توجه به رابطه داده شده، مقدار کسینوس را به دست می آوریم:

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

می دانیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم}} \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۱۲۲ گزینه ۳ به کمک روابط مثلثاتی داریم:

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow[\cos \alpha = -\frac{3}{5}]{\text{ناحیه سوم}} \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow[\sin \alpha = -\frac{4}{5}]{\text{ناحیه سوم}} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{پس: } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0.27 \end{aligned}$$

۱۲۳ گزینه ۲

$$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس: $A = (-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

۱۲۴ گزینه ۲

$$\tan\frac{17\pi}{6} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{3} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

پس: $\tan\frac{17\pi}{6} \cdot \sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

۱۲۵ گزینه ۲

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan(120^\circ) = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\sin 840^\circ = \sin(4 \times 360^\circ + 120^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس: $\tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

۱۲۶ گزینه ۴

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan 165^\circ = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

پس: $\tan(285^\circ) \cdot \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) = (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ)$
 $= -1 + \sin^2 15^\circ = -(1 - \sin^2 15^\circ) = -\cos^2 15^\circ$

۱۲۷ گزینه ۴

بی‌دانیم: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

ضابطه تابع f را در $\sin^2 3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = 16 \left(\frac{\overbrace{\sin 3x \cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x}^{\frac{1}{2} \sin 6x}}{\sin 3x} \right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

$$\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$$

$$\sin 12x \cos 12x = \frac{1}{2} \sin 24x$$

$$\sin 24x \cos 24x = \frac{1}{2} \sin 48x$$

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{16} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left(\frac{\sin \frac{48\pi}{36}}{16 \sin \frac{3 \times \pi}{36}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ و $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و البته: $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{16 \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \right)} = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

۱۲۸ گزینه ۲ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)}$$

دقت کنید که: $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha$ و $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$

برای حل سؤال مقادیر $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$۱) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$۲) \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$۳) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$۴) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$۵) \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

حال خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25} - (-\frac{4}{5})}{\frac{7}{24}} = \frac{24 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$

۱۲۹ گزینه ۲

می دانیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

از طرفی:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می کنیم.

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8 \times 17 - 8 \times 15}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{\frac{16}{15}}{-7} = -\frac{16}{105}$$

دقت کنید اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع اول باشد با توجه به مقدار $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$, $\tan \frac{\alpha}{2}$ نیز ربع اول خواهد بود و اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع سوم باشد باز هم α در ربع اول خواهد بود.

۱۳۰ گزینه ۱

قبل از حل سؤال نحوه محاسبه $\sin 3\alpha$ و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می کنیم.

$$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

حال تابع $(f\alpha)$ را ساده می کنیم.

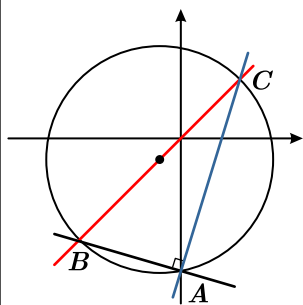
$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 2 \sin 3\alpha$$

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{36\pi + 5\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(4\pi + \frac{5\pi}{9}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{9}\right) =$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{9} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

۱۳۱ گزینه ۲ چون مرکز روی خط $y = -x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس زاویه A قائمه بوده و دو خط اولیه بر هم عمود هستند و داریم:



$$m = -\frac{1}{2}, m' = \frac{-2}{a}, mm' = -1 \Rightarrow a = -1; \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(3, 0)$$

$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3, 3); \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, -1)$$

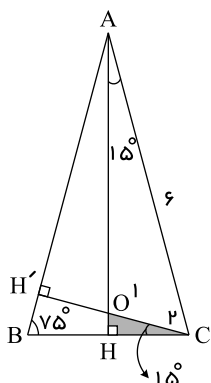
$$AC = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}, AB = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{1}{3}, \tan C = 3$$

$$\tan(B - C) = \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B \tan C} = \frac{\frac{1}{3} - 3}{1 + \frac{1}{3} \times 3} = -\frac{8}{4} \Rightarrow \cot(B - C) = -\frac{3}{4}$$

۱۳۲ گزینه ۴

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$



روش اول: دقت کنید در مثلث $\triangle OHC$ داریم $\hat{H} = 90^\circ, \hat{C}_1 = 15^\circ$

نکته: در مثلث قائم الزاویه با یک زاویه 15° ، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است.

$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} OC \times OC = \frac{OC^2}{8} \text{ پس}$$

از طرفی در مثلث $\triangle OAC$ طبق قضیه سینوسها داریم:

$$\frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{O}_1} \Rightarrow \frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{6}{\underbrace{\sin 105^\circ}_{\cos 15^\circ}} \Rightarrow OC = 6 \times \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 6 \tan 15^\circ$$

$$\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$

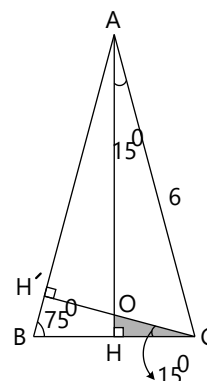
$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{(6 \tan 15^\circ)^2}{8} = \frac{36}{8} \times \frac{1}{(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

* این روش فراتر از کتاب ریاضی تجربی است و مناسب دانش آموزان رشته ریاضی است.

روش دوم:

$$\triangle AHC: \sin 15^\circ = \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=6} HC = 6 \sin 15^\circ$$

$$\triangle OHC: \tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = HC \times \tan 15^\circ$$



$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times HC \times OH$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times (6 \sin 15^\circ) \times (HC \tan 15^\circ) = \frac{1}{2} \times 36 \sin^2 15^\circ \times \tan 15^\circ$$

می دانیم:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

از طرفی:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

پس داریم:

$$S_{\triangle OHC} = 18 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) \times \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{9}{2(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

۱۳۳ گزینه ۳ راه حل اول:

مخرج مشترک گرفته و ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= 2 \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

۱۳۴ گزینه ۳

$$1 \circ (\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{1 \circ} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

طرفین تساوی فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{9 \times 5}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

حال از رابطه $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5 + 5 \tan^2 \alpha = 4 \circ \tan \alpha \Rightarrow 5 \tan^2 \alpha - 4 \tan \alpha + 5 = 0 \Rightarrow 5 \tan^2 \alpha - 4 \tan \alpha + 5 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \times 5 \times 5 = 9 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan \alpha = \frac{1}{4} \end{cases}$$

۱۳۵ گزینه ۴ از رابطه داده شده، مقدار $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 4 + 4 \sin x = 1 - \sin x \Rightarrow 5 \sin x = -3 \Rightarrow \sin x = \frac{-3}{5}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه ۳}} \cos x = \frac{-4}{5}$$

حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ را می‌یابیم.

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{2 \cos^2(\frac{x}{2})} = \tan^2(\frac{x}{2}) \Rightarrow \tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - (-\frac{4}{5})}{1 + (-\frac{4}{5})} \Rightarrow \tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 1 \Rightarrow \tan(\frac{x}{2}) = \pm 1$$

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

$\frac{x}{2}$ زاویه‌ای در ناحیه دوم است و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:

$$\tan(\frac{x}{2}) = -1$$

۱۳۶ گزینه ۲

$$\cot\left(\frac{\pi + 4x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\tan 2x, \quad \cos\left(\frac{\pi + 8x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = -\sin 4x$$

$$-\tan 2x = -\sin 4x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \frac{\sin 2x(1 - 2 \cos^2 2x)}{\cos 2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos^2 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} \\ 2x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow a = x_1 - x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}; \\ \cos(3a) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{جوابی در بازه داده شده برای این حالت وجود ندارد.} \end{cases}$$

۱۳۷ گزینه ۳

$$\frac{\sin(-285^\circ) + 2 \cos(-105^\circ)}{2 \sin(165^\circ) + 3 \sin(375^\circ)} = \frac{-\sin(\frac{3\pi}{4} + 15^\circ) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 15^\circ)}{2 \sin(\pi - 15^\circ) + 3 \sin(2\pi + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{2 \sin 15^\circ + 3 \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{5 \sin 15^\circ} = \frac{1}{5} \cot 15^\circ - \frac{2}{5}$$

برای محاسبه $\cot 15^\circ$ از فرمول مثلثاتی $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

پس حاصل عبارت مطلوب برابر است با:

$$\frac{1}{5}(2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{3}$$

۱۳۸ گزینه ۴

$$A = \frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} \times \frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}$$

$$A = \frac{\sin^2 \frac{11\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12} + 2 \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin^2 \frac{11\pi}{12} - \cos^2 \frac{11\pi}{12}} = \frac{1 + \sin \frac{11\pi}{6}}{-\cos \frac{11\pi}{6}}$$

$$A = \frac{1 + \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})}{-\cos(2\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

راه حل دوم:

$$A = \frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} \Rightarrow A^2 = \frac{1 + \sin \frac{11\pi}{6}}{1 - \sin \frac{11\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1 + \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})}{1 - \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

چون $A < 0$ است $\rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

۱۳۹ گزینه ۲

$$A = -1 + \tan(7 \times 22.5^\circ) = -1 + \tan(157.5^\circ)$$

$$= -1 + \tan(180^\circ - 22.5^\circ) = -1 - \tan 22.5^\circ$$

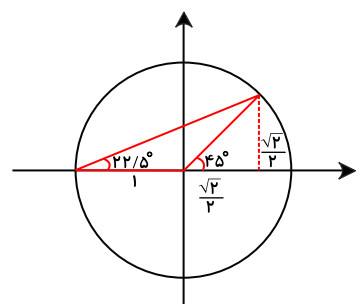
$$\tan 22.5^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = -1 - (\sqrt{2} - 1) = -\sqrt{2}$$

۱۴۰ گزینه ۱ داریم $3\alpha = 67.5^\circ$ ، بنابراین:

$$A = 1 - \tan(67.5^\circ)$$

$$= 1 - \tan(90^\circ - 22.5^\circ) = 1 - \cot 22.5^\circ$$



$$\cot 22.5^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow A = 1 - (1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

اکنون از شهود هندسی استفاده می‌کنیم:

۱۴۱ گزینه ۱ روش اول: تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} - \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x}{\sin \pi x \cos \pi x}$$

$$f(x) = \frac{-(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x)}{\sin \pi x \cos \pi x} = \frac{-\cos 2\pi x}{\frac{1}{2} \sin 2\pi x} = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

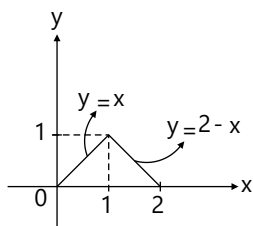
روش دوم:

با توجه به اتحاد $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot \alpha$ به راحتی حل می شود.

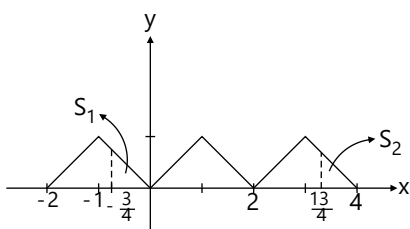
$$\tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

۱۴۲ گزینه ۱ نمودار تابع داده شده را در یک دوره تناوبش رسم می کنیم.



اکنون شکل را در بازه خواسته شده یعنی $[-\frac{3}{4}, \frac{13}{4}]$ رسم می کنیم:



چون $S_1 = S_2$ است بنابراین مساحت خواسته شده دو برابر مساحت یکی از مثلث های کامل است، یعنی $2 \times (\frac{2 \times 1}{2}) = 2$.

۱۴۳ گزینه ۳ می دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{چون شکل فرمت خود سینوس است، } b > 0} b + a = \sqrt{3}$$

نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2} b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3} b$$

$$-2 \begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

۱۴۴ گزینه ۳

$$y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

چون فاصله دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر با دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع در اطراف $x = 0$ صعودی است، پس a و b هم علامتند و داریم:

$$a + b = 2 \text{ یا } a + b = -2$$

۱۴۵ گزینه ۲

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + b \sin x$$

نقطه $(0, -\frac{5\pi}{6})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{5\pi}{6} \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 = a + b \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(0) > 0$ است پس $a > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

$$\text{پس: } f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

۱۴۶ گزینه ۳ می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است پس $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ است. و می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ ، دورهٔ تناوب

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ و } Max = |a| + c \text{ است.}$$

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$$

چون فاصله دو مینیمم متوالی، دورهٔ تناوب اصلی منحنی است، پس:

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

چون در شکل داده شده بعد از $x = 0$ نمودار در حال صعود است پس a, b هم علامتند، یعنی:

$$a = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a + b = 2 \text{ یا } a = -1 \rightarrow b = -1 \rightarrow a + b = -2$$

۱۴۷ گزینه ۱ می‌دانیم $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ است.

$$f(x) = -(\cot \pi x - \tan \pi x) = -2 \cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$$

می‌دانیم دوره تناوب $y = \tan bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است بنابراین $T = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

۱۴۸ گزینه ۴

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \rightarrow y = a + b \cos x$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ می‌دانیم که $Max = |a| + c$ است.

$$Max = 3 \rightarrow |b| + a = 3 \xrightarrow[\text{پس } b < 0 \text{ است}]{\text{شکل فرمت قرینه‌کسینوس را دارد}} -b + a = 3$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{7\pi}{3} \\ 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 0 = a + \frac{b}{2} \rightarrow 2a + b = 0$$

$$\text{پس: } \begin{cases} -b + a = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1, b = -2$$

۱۴۹ گزینه ۴ در تابع $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است.

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} Max = 1 \rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 \rightarrow -|a| + c = -3 \end{array} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

چون شکل فرمت قرینه سینوس را دارد پس $ab < 0$ است بنابراین $\frac{a}{b} = -6$ است.

۱۵۰ گزینه ۳ در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار ماکسیمم تابع از رابطه $Max = |a| + c$ به دست می‌آید.

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow |b| + a = \frac{3}{2} \xrightarrow[\text{است پس } b < 0 \text{ است}]{\text{شکل فرمت قرینه سینوس}} -b + a = \frac{3}{2}$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} -b + a = \frac{3}{2} \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow 3a = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1$$

۱۵۱ گزینه ۱ در تابع $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است.

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = 3, b = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} Max = 1 \rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 \rightarrow -|a| + c = -3 \end{array} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

شکل فرمت سینوس را دارد یعنی $ab > 0$ است و بدون دانستن این موضوع هم گزینه اول انتخاب می‌شد.

۱۵۲ گزینه ۳ از روی نمودار، مشخص است که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است، پس داریم:

$$y = c + a \cos bx$$

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 5 \\ \min &= -|a| + c = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

۱۵۳ گزینه ۱ با توجه به نمودار و اینکه $0 < c < \pi$, $b > 0$ مشخص است که a مثبت است.

$$\max = |a| = \frac{1}{4} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \cos(bx + c)$$

نقطه $A(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ در تابع صدق می‌کند:

$$\frac{1}{4} \cos(\frac{3}{4}b + c) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos(\frac{3}{4}b + c) = -1 \Rightarrow \frac{3}{4}b + c = \pi$$

همچنین در $x = \frac{5}{4}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f(\frac{5}{4}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cos(\frac{5}{4}b + c) = 0 \Rightarrow \cos(\frac{5}{4}b + c) = 0$$

با توجه به نمودار در $x = \frac{5}{4}$ دومین بار است که نمودار تابع محور x را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{5}{4}b + c &= \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{4}b + c &= \pi \end{aligned} \right. \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \frac{5}{4}b - \frac{3}{4}b = \frac{3\pi}{2} - \pi \Rightarrow \frac{2}{4}b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$$

$$\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{b=\pi} c = \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \cdot c}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

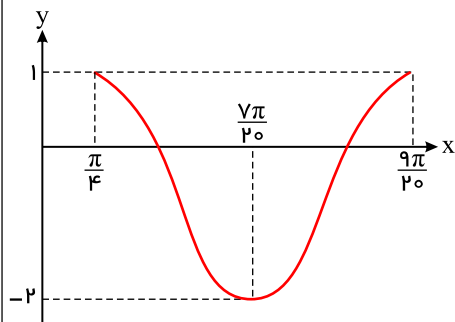
۱۵۴ گزینه ۴ با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{5}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس:

$$\left\{ \begin{aligned} c + |a| &= \frac{5}{2} \\ c - |a| &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 1 + |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}$$

چون نمودار در شکل برخورد با محور y ها دارای مینیمم است، پس a منفی است.

$$|a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a<0} a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot c = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$$

۱۵۵ گزینه ۱



$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5 \Rightarrow b = 5$$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \Rightarrow a \cos^2\left(5 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5\pi}{20}\right) &= -2 \Rightarrow a \cos^2\left(5 \times \frac{5\pi}{20} - \frac{\pi}{4}\right) + c = -2 \Rightarrow c = -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad \Rightarrow ab = 15$$

۱۵۶ گزینه ۴

ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نمودار}} \begin{cases} a - \left|\frac{b}{2}\right| = -1 \\ a + \left|\frac{b}{2}\right| = 3 \end{cases} \rightarrow a = 1 \xrightarrow{f(0)=-1} -1 = 1 + \frac{b}{2} \Rightarrow b = -4$$

مقدار C را هم از دوره تناوب تابع به دست می‌آوریم:

$$\frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \cos 2x \xrightarrow{\text{صفرهای } f} 1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \begin{cases} 2x_1 = \frac{\pi}{3} \\ 2x_2 = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5\pi}{6} \\ x_1 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow x_2 - x_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

۱۵۷ گزینه ۳ از نمودار مشخص است که $a(-b) > 0 \rightarrow ab < 0$ است.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2bx \Rightarrow y = -\frac{a}{2} \sin 2bx + \frac{a}{2} + c$$

$$\left\{ \begin{aligned} y_{\max} &= \left| -\frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = 1 \\ y_{\min} &= -\left| -\frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\times -1} \Rightarrow 2\left|\frac{a}{2}\right| = 3 \rightarrow a = \pm 3,$$

$$T = \frac{15\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = 5\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = 5\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{5} \xrightarrow{ab < 0} ab = -\frac{3}{5} = -0.6$$

۱۵۸ گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\frac{y = a \cdot \cos bx + c}{a \cdot \sin bx + c} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

توجه: در نمودارهای متناوب، فاصله بین دو $\min$ یا دو $\max$ متوالی، یک دوره تناوب تابع است.

توجه: در نمودار تابع $y = a \cdot \sin bx + c$ اگر بلافاصله بعد از محور y ها منحنی نزولی باشد، آنگاه $a \cdot b < 0$ است.

$$\xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2$$

با توجه به نمودار در برخورد با محور y ها داریم $a < 0$ ، پس $a = -2$ و داریم:

$$y = 3 \cos\left(\frac{x}{-2}\right) \Rightarrow \text{دوره تناوب } T' = \frac{2\pi}{\left|\frac{-1}{2}\right|} = 4\pi$$

۱۵۹ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sin \frac{2x}{a} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{a}\right|} = \frac{\pi}{3}$$

$$|a| = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

۱۶۰ گزینه ۴ دوره تناوب $f(x)$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ است؛ بنابراین دوره تناوب $3f(2x) - \frac{1}{2}$ نصف دوره تناوب $f(x)$ ، یعنی $\frac{\pi}{4}$ ، خواهد بود.

۱۶۱ گزینه ۴ می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow -4 \sin x \cos x = 1 \rightarrow -4\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 \rightarrow -2 \sin 2x = 1$$

$$\rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم.}} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

۱۶۲ گزینه ۱

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

به کمک اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ عبارت $\sin^3 x + \cos^3 x$ را تجزیه می‌کنیم.

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) \cdot (\sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ غلط} \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{جمع} = 0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

۱۶۳ گزینه ۴ می‌دانیم $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$ است.

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

۱۶۴ گزینه ۲

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد.

۱۶۵ گزینه ۴ روش اول:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x + \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi + x - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

غ ق (با توجه به شرط)

روش دوم: اگر $k = 0$ باشد گزینه اول و دوم $x = 0$ را می دهند که در معادله صدق نمی کند اگر $k = 1$ باشد گزینه سوم $x = \frac{\pi}{2}$ را می دهد که در معادله صدق نمی کند بنابراین گزینه چهارم صحیح است.

۱۶۶ گزینه ۲

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \rightarrow$$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$

$$\rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{48\pi}{8} = 6\pi$$

۱۶۷ گزینه ۳ می دانیم که $\sin \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$ است.

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \rightarrow 4\left(\frac{1}{2} \sin 6x\right) = 1 \rightarrow 2 \sin 6x = 1 \rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}$$

$$\rightarrow$$

k	۰	۱
x	$\frac{\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}$	$\frac{13\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}$

بنابراین معادله در بازه داده شده دارای ۴ جواب است.

۱۶۸ گزینه ۱ این تست با عددگذاری حل می شود. $x = 0$ در معادله صدق می کند $\left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = \cos 0\right)$ بنابراین گزینه های سوم و چهارم حذف می شوند.

$x = \frac{\pi}{3}$ در معادله صدق نمی کند $\left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3} \neq \cos \frac{2\pi}{3}\right)$ بنابراین گزینه دوم نیز حذف می شود و جواب گزینه اول یعنی $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

۱۶۹ گزینه ۳ می دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس داریم:

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos 3x + \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (\cos 3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

معادله دوم نیز سه جواب دارد $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi)$ اما جواب π در هر دو معادله به دست آمد و تکراری است. پس در کل معادله فوق ۵ جواب
 $(0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ را خواهد داشت.

۱۷۰ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha \times 2 \cos^2 2\alpha \times 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\alpha \neq k\pi]{\times \sin \alpha} \underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} \cdot \cos 4\alpha =$$

$$\frac{1}{4} \underbrace{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 8\alpha}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sin 8\alpha = \pm \frac{1}{\lambda} \sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \pm \sin \alpha$$

$$(1) \sin 8\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{7k\pi}{7} \Rightarrow \max : \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{7k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \Rightarrow \max : \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

$$(2) \sin 8\alpha = -\sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{7k\pi}{9} \Rightarrow \max = \frac{6\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{7k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \Rightarrow \max = \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

* البته دقت کنید که $\alpha = \pi$ جواب قابل قبول برای معادله نیست. پس ماکزیمم جوابها $\frac{7\pi}{9}$ است.

۱۷۱ گزینه ۲ می‌دانیم که $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ است.

$$5 \sin^2 x + 2 \cos 3x + 2 = 0 \rightarrow 5 \sin^2 x + 2(1 + \cos 3x) = 0 \rightarrow 5 \sin^2 x + 2 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0$$

جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر است که تک تک آنها صفر باشند و ریشه مشترک، جواب معادله است.

$$5 \sin^2 x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

$$2 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0 \rightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \xrightarrow{\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$$

بنابراین ریشه‌های مشترک π و $-\pi$ هستند. پس معادله دو جواب دارد.

۱۷۲ گزینه ۲ می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ ، پس می‌توان نوشت:

$$2 \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 1 \Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1$$

سمت چپ معادله برابر $\sin 3x$ است، پس:

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$$

بنابراین مجموع این سه ریشه برابر $\frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi}{6}$ است.

۱۷۳ گزینه ۴

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times 2 \cos^2 \alpha \times 2 \cos^2 2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow 64 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow 8 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha = \pm 1$$

دو طرف را در $\sin \frac{\alpha}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$4 \underbrace{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)}_{\sin \alpha} \cos \alpha \cos 2\alpha = \pm \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 4 \underbrace{\left(2 \sin \alpha \cos \alpha\right)}_{\sin 2\alpha} \cos 2\alpha = \pm \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin 4\alpha = \sin\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 2k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}\alpha = 2k\pi \\ \frac{9}{2}\alpha = 2k\pi \end{cases} \\ 4\alpha = (2k+1)\pi \mp \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}\alpha = (2k+1)\pi \\ \frac{7}{2}\alpha = (2k+1)\pi \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}\alpha = k\pi \\ \frac{9}{2}\alpha = k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

باید $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ یعنی $\alpha \neq 2k\pi$ ، پس ریشه‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \dots, \frac{12\pi}{7} & \text{جواب ۶} \\ \alpha = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \dots, \frac{16\pi}{9} & \text{جواب ۸} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۱۴ جواب دارد.

۱۷۴ گزینه ۴

$$8 \cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow 8 \cos x = 1 + \tan^2 x$$

با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$8 \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 8 \cos^3 x = 1 \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۲ جواب است.

۱۷۵ گزینه ۲ با استفاده از رابطه $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ داریم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ پس:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

جوابهای واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از:

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$

۱۷۶ گزینه ۲ با استفاده از رابطه $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ عبارت $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ را به صورت زیر نوشته و در معادله جایگزین می کنیم.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

طبق رابطه (۱) داریم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \xrightarrow{(1)} \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

۱۷۷ گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = (1 + \sin x)^2$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = 1 + \sin^2 x + 2 \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + 2 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x (\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 1 + \sin x = 0 \quad (\text{چرا؟}) \end{cases}$$

جوابهای معادله به صورت $k\pi$ هستند که فاصله هر دو جواب متوالی π است.

۱۷۸ گزینه ۴

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)} = 0 \Rightarrow \frac{-\sin 2x + \cos 2x}{(\cos 2x)(-\sin 2x)} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} \\ x_2 = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{12}, x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\tan(2\alpha) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

۱۷۹ گزینه ۲ می‌دانیم: $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\sin 2x - 2 \sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x \cdot (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

۵ جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد.

۱۸۰ گزینه ۴

$$\cos 2x = 3 \sin x - 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 1$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\sin x = -2 \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

k	0
x	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$$\text{اختلاف جواب‌ها} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

۱۸۱ گزینه ۲

$$2 \cos^2 x = \sin x + 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - (1 + \sin x) = 0$$

$$(1 + \sin x)(2 - 2 \sin x - 1) = (1 + \sin x)(1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

معادله در بازه $(0, 2\pi)$ ۳ جواب دارد.

۱۸۲ گزینه ۳

$$\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi - 2x}{2}\right)$$

$$\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \cos 2x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

بنابراین به دو فرم جواب $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$ و $x = (2k-1)\pi$ رسیدیم. حال توجه می‌کنیم درحالتی که $2k+1$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$\overbrace{\frac{(2k+1)\pi}{3}}^{\text{فرد}} = \underbrace{(2k'-1)\pi}_{\text{فرد}}$$

که همان فرم دوم به دست آمده است. لذا کلیه جواب‌ها را می‌توان به فرم $\frac{(2k+1)\pi}{3}$ در نظر گرفت که همان گزینه (۳) است.

۱۸۳ گزینه ۲

$$\sin 2x = \cos 3x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 3x$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi \pm 3x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi + 3x \\ \frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = -2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{-2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \text{غ ق ق نیست } [0, \pi]$$

۳ جواب در بازه $[0, \pi]$

k	۰	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{10}$

۱۸۴ گزینه ۲

$$\cos 3x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 2x)$$

$$\xrightarrow{x \in [0, \pi]} 3x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$$

بنابراین در بازه $[0, \pi]$ ، ۳ پاسخ موجود است.

۱۸۵ گزینه ۲ چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ یا همان $(x+1)(x-1)$ بخش‌پذیر است بنابراین $p(1) = p(-1) = 0$ است. اکنون برای محاسبه باقی‌مانده $Q(x)$ بر $x - 2$ کافی است که $Q(2)$ را حساب کنیم.

$$Q(x) = p(x-1) + p(1-x) \rightarrow Q(2) = p(1) + p(-1) = 0 + 0 = 0$$

۱۸۶ گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 1$ برابر ۸ است، پس $P(1) = 8$ و باقی‌مانده تقسیم بر $2x + 1$ برابر ۵ است پس $P(-\frac{1}{2}) = 5$. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ یک چندجمله‌ای درجه اول به صورت $mx + n$ است.

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + mx + n \Rightarrow \begin{cases} P(1) = m + n = 8 \\ P(-\frac{1}{2}) = -\frac{m}{2} + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 2, n = 6$$

بنابراین باقی‌مانده این تقسیم $2x + 6$ است.

۱۸۷ گزینه ۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است پس $p(4) = 3$ می‌باشد و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است پس $p(-2) = 1$ می‌باشد. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده، تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ کافی است که به جای x عدد ۲ را قرار دهیم.

$$x = 2 \rightarrow p(4) + 4p(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

۱۸۸ گزینه ۱ چون $P(x)$ بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است پس $P(\frac{1}{2}) = 0$ است.

$$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{16}) + a(\frac{1}{8}) + 2(\frac{1}{4}) - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 - 12 = 0 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$ است. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده آن بر $x + 2$ کافی است که $P(-2)$ را حساب کنید.

$$P(-2) = 2(16) + 7(-8) + 2(4) - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۱۸۹ گزینه ۳

می‌دانیم:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$$

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)(\frac{1}{2}x + 1) - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{b}{2}x + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + (2a + \frac{b}{2})x + (b - 2) \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \end{cases}$$

برای آن که کمترین میزان مجموع ضرایب به دست آید $a = 1$ قابل قبول است. (برای هر مقدار a قابل قبول است.)

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 1 + 4 + 2 = 7$$

۱۹۰ گزینه ۴ رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

با جایگذاری $x = -2$ داریم:

$$P'(-2) = -2Q(-2) + (4 - 4)Q'(-2) + 3 = -2(3) + 3 = -3$$

باقیمانده $P'(x)$ بر $x + 2$ برابر $P'(-2)$ است؛ باقیمانده برابر (-3) است.

۱۹۱ گزینه ۴ ابتدا $p(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x) = x^{3n+1} + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a = x^{3n} \times x + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$$

$$= (x + 2) \cdot x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$$

چون $p(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، پس باید $p(-2)$ برابر صفر باشد.

$$p(-2) = (-2 + 2) \times (-2)^{3n} + (-2)^6 + 3 \times (-2)^5 + 16a = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 64 - 3 \times 32 + 16a = 0 \Rightarrow 16a = 96 - 64 = 32 \Rightarrow a = 2$$

برای $n = 1$ داریم:

$$p(x) = (x + 2)x^3 + x^6 + 3x^5 + 32 = x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 32$$

باقی مانده $p(x)$ بر عبارت درجه دوم $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ است و داریم:

$$x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 32 = (x - 1)(x + 3)Q(x) + ax + b$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 3 + 1 + 2 + 32 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = 39$$

توجه کنید که فقط در گزینه ۴ حاصل $a + b$ برابر ۳۹ است. هرچند a, b قابل محاسبه است.

$$x = -3 \Rightarrow 729 - 729 + 81 + 2(-27) + 32 = 0 - 3a + b \Rightarrow -3a + b = 59 \Rightarrow 3a - b = -59$$

$$\begin{cases} a + b = 39 \\ 3a - b = -59 \end{cases} \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow -5 + b = 39 \rightarrow b = 44$$

$$\text{باقی مانده} = ax + b = -5x + 44$$

۱۹۲ گزینه ۴ با توجه به گزینه ها که همگی عبارتی درجه اول بر حسب x هستند، خارج قسمت را به صورت $Q(x) = ax + b$ در نظر گرفته و با نوشتن رابطه تقسیم داریم.

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(ax + b) + x + 2$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 10(a + b) + 3 = 13 \Rightarrow a + b = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-a + b) + 1 = 11 \Rightarrow -a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3 \rightarrow a = -2 \Rightarrow Q(x) = -2x + 3$$

۱۹۳ گزینه ۱ $f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است؛ پس $f(-2) = 0$.

بنابراین داریم:

$$(-2)^5 - 3(-2)^3 + a(-2) + 5 = 0$$

$$\text{پس } 0 = -32 + 24 - 2a + 5 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \text{ که نتیجه می دهد}$$

۱۹۴ گزینه ۱ در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می شود که آن عدد درون بازه باشد.

پس:

$$x + 1 < 3 < 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 < 3 \rightarrow x < 2 \\ 2x - 1 > 3 \rightarrow x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

۱۹۵ گزینه ۱

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4b - a = 4 \end{cases} \Rightarrow 5b = 8 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{8}{5} \\ a = \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a = -\frac{4}{5}$$

۱۹۶ گزینه ۴ داریم $\Delta \in (7x - 9, 3x + 1)$

$$\begin{cases} 7x - 9 < \Delta \Rightarrow x < 2 \\ 3x + 1 > \Delta \Rightarrow x > \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (a, b) = \left(\frac{4}{3}, 2\right) \Rightarrow ab = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$$

۱۹۷ گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع، f در $x = \frac{-1}{3}$ حد دارد؛ اما تعریف نشده است. بنابراین طبق ضابطه، $x = \frac{-1}{3}$ هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج عبارت

$$\frac{3x^2 + ax + b}{bx + c} \text{ است.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{a}{3} + b = 0 \Rightarrow 3b - a = -1 & (1) \\ b\left(\frac{-1}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad b + 2a = 16 \Rightarrow \frac{12 + 2a + b}{14} = 2 \Rightarrow b + 2a = 16 \Rightarrow x = 2 \text{ تابع در } x \text{ پیوسته است.}$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} b = 2, a = 7 \Rightarrow ab = 14$$

۱۹۸ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{[(-2)^-] + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{-3 + 3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

۱۹۹ گزینه ۱ تابع سینوس در ربع اول افزایش می‌یابد پس $\left(\frac{1}{2}\right)^- = \sin \frac{\pi^-}{6}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{6}} [2 \sin x - 1] = [2\left(\frac{1}{2}\right)^- - 1] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

۲۰۰ گزینه ۳ می‌دانیم:

$$f(x) = \frac{1}{2}((f+g) + (f-g))$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} = \frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)) = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\text{به طریق مشابه: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2,5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} = 2,5$$

۲۰۱ گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} + \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = ?$$

ابتدا معادله خطوط موجود در شکل را می‌نویسیم:

$$A(0, 0), B(-\pi, -2)$$

$$m = \frac{0+2}{0+\pi} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{\pi}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{\pi}x$$

$$c(0, 0), c(2, -\pi)$$

$$m' = \frac{0+\pi}{0-\pi} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y - 0 = -\frac{\pi}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2}x$$

پس طبق شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|-\frac{\pi}{2}x|} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|\frac{2}{\pi}x|}{\sin x} = \frac{1}{-1} = -1$$

پس حاصل حد مطلوب برابر $1 - \frac{4}{\pi^2}$ است.

۲۰۲ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & x < 0 \\ -4x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{|x|} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{f(x)} = -4 + \frac{-3}{2} = -5.5$$

۲۰۳ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} 2 \left[\frac{2-x}{2} \right] + a \left[\frac{x+2}{3} \right]$$

$$= 2[2^-] + a[0^+] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} 2 \left[\frac{2-x}{2} \right] + a \left[\frac{x+2}{3} \right]$$

$$= 2[2^+] + a[0^-] = 4 - a$$

$$4 - a = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \left[\frac{a}{3} \right] = \left[\frac{2}{3} \right] = 0$$

۲۰۴ گزینه ۳ حد تابع در $x = -4$ موجود است؛ بنابراین حد راست و حد چپ باید در این نقطه موجود و برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left[\frac{2-x}{2} \right] - a \left[\frac{x+4}{5} \right] = [3^-] - a[0^+] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \left[\frac{2-x}{2} \right] - a \left[\frac{x+4}{5} \right] = [3^+] - a[0^-] = 3 + a \end{cases}$$

$$3 + a = 2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow [a] = -1$$

۲۰۵ گزینه ۳ ابتدا باید معادله سهمی را بنویسیم که محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۰ و ۴ قطع کرده است (طول رأس سهمی وسط دو نقطه هم‌عرض روی سهمی است).

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \rightarrow f(x) = ax(x - 4) \xrightarrow{s \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} 1 = 2a(-2) \rightarrow a = -\frac{1}{4} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x(x - 4) = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

اکنون باید معادله خط راست g را با داشتن ۲ نقطه بنویسیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{array} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x} = \frac{1}{-4} \rightarrow -4y + 4 = x$$

$$\rightarrow -4y = x - 4 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1 \rightarrow g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}x + 1}{4 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{-2 + 1 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{5}{4}$$

۲۰۶ گزینه ۱

$$f(x) = x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} \right)^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

۲۰۷ گزینه ۲ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، حاصل $[x^3]$ دقیقاً برابر ۸ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۲۰۸ گزینه ۴ در $a \rightarrow -1^+$ عبارت $x+1$ مثبت است، از طرفی در مورد $[x]$ و $[-x]$ داریم:

$$[x] = [(-1)^+] = -1 \quad [-x] = [-(-1)^+] = [1^-] = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1x+1+1+[-x]}{x-[-x]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1x+1+(-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

۲۰۹ گزینه ۱ طبق فرض، تابع $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$ در نقطه‌ای حد دارد ولی در آن نقطه پیوسته نیست؛ این نقطه اولاً $x=1$ بوده و ثانیاً $x=1$ ریشه

صورت f نیز هست، پس:

$$x^2+ax+b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1 \quad (I)$$

همچنین $x=1$ ریشه معادله داده شده است:

$$5x^2-ax+b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 5-a+b=0 \Rightarrow a-b=5 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=5 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-3$$

$$\left[\frac{b-2a}{3}\right] = \left[\frac{-3-4}{3}\right] = \left[\frac{-7}{3}\right] = -3$$

۲۱۰ گزینه ۲ ابتدا توجه می‌کنیم که داریم:

$$8x^3 - x = x(8x^2 - 1)$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}^- : x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow 8x^2 - 1 > 1 \Rightarrow x(8x^2 - 1) < -\frac{1}{2} \Rightarrow [x(8x^2 - 1)] = -1 \quad (I)$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}^+ : x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow 8x^2 - 1 < 1 \Rightarrow x(8x^2 - 1) > -\frac{1}{2} \Rightarrow 8x^3 - x = -\frac{1}{2} + \varepsilon < 0$$

$$\Rightarrow [x(8x^2 - 1)] = -1 \quad (II)$$

بنابراین طبق (I) و (II) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} [8x^3 - x] = -1$$

۲۱۱ گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $((a+b)(a^2+b^2-ab) = a^3+b^3)$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} \times \frac{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}}{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+8)(x+2)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{6} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم:

از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})} = \frac{-6}{6(\frac{1}{12})} = -12$$

۲۱۲ گزینه ۴ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $((a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3-b^3)$ و مخرج را بر عامل ابهام یعنی

$x-2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \times \frac{4 + \sqrt{(3x+2)^2} + 2\sqrt{3x+2}}{4 + \sqrt{(3x+2)^2} + 2\sqrt{3x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{4 - (3x+2)}^{-3x+6}}{(x-2)(5x-8)(4 + \sqrt{(3x+2)^2} + 2\sqrt{3x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(5x-8)(4 + \sqrt{(3x+2)^2} + 2\sqrt{3x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(5x-8)(4 + \sqrt{(3x+2)^2} + 2\sqrt{3x+2})}$$

$$= \frac{-3}{(2)(4+4+4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

روش دوم:

از قاعده هوییتال کمک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x - 18} = \frac{\frac{-1}{4}}{2} = \frac{-1}{8}$$

۲۱۳ گزینه ۲ روش اول: از اتحاد مزدوج برای رفع ابهام، استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5) - \sqrt{3x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{(2x+5) + \sqrt{3x+5}}{(2x+5) + \sqrt{3x+5}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5)^2 - 49x}{4x^2 - (3x+1)} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+5}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 29x + 25}{4x^2 - 3x - 1} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+5}} = \frac{-21}{5} \times \frac{4}{14} = -1\frac{2}{7} \end{aligned}$$

روش دوم: از قاعده هوییتال کمک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}{2 - \frac{1}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = -1\frac{2}{7}$$

۲۱۴ گزینه ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج، صورت کسر و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، مخرج کسر را گویا می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt{x}} &\times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}} \times \frac{1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+3 - 3x-4) \overbrace{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}^3}{(1+x) \underbrace{(\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4})}_2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1) \times 3}{(1+x) \times 2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

۲۱۵ گزینه ۲

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2b}{ax - b} &= \frac{0}{\infty} \Rightarrow \infty a - b = 0 \Rightarrow b = \infty a \\ \text{راه اول} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty a (\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2)}{a \cdot (x - \infty)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\infty \sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2)(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2)}{(x - \infty)(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty (\sqrt[3]{x} - 2)}{(x - \infty) \times 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times (\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{4(x - \infty)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} &= \frac{1}{6} \\ \text{راه دوم} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b \frac{\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}}{2\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{x}}}}{a} &= \frac{\infty a \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{4a} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۲۱۶ گزینه ۴ چون صورت به ازای $x = 1$ صفر است پس باید مخرج هم صفر باشد تا جواب غیر صفر داشته باشد.

$$a + b = 0 \rightarrow b = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-a\sqrt{2 - \sqrt{x}} + a}{ax - a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{2 - \sqrt{x}} + 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{-1 \times \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^3}}}{1} = \frac{1}{6}$$

۲۱۷ گزینه ۲ ابتدا براکت را به عدد تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

۲۱۸ گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 + 3x} - \sqrt{2 - x}}{\sqrt{1 - \cos x}} \times \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}} \times \frac{\sqrt{2 + 3x} + \sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 + 3x} + \sqrt{2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2 + 3x - 2 + x)(\sqrt{2})}{(\sqrt{1 - \cos^2 x})(2\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{2|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-\sin x} = -2$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 + 3x} - \sqrt{2 - x}}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 + 3x} - \sqrt{2 - x}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 + 3x} - \sqrt{2 - x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 + 3x} - \sqrt{2 - x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1(3)}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{1(-1)}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

۲۱۹ گزینه ۴ می‌دانیم: بنا به هم‌ارزی مثلثاتی:

$$\tan^n u \simeq \lim_{u \rightarrow 0} (u^n), \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \simeq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2}$$

$$(1) \quad 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos(\sqrt{2}x) = \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2} = x^2$$

$$(2) \quad tg^2 u \sim u^2 \Rightarrow tg^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow a + n = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

۲۲۰ گزینه ۱ در یک همسایگی راست $x = 0$ داریم:

$$x \rightarrow 0^+ : \tan[x] = \tan[0^+] = \tan 0 = 0$$

پس حد داده شده، چنین است:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(1-\cos\sqrt{3}x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(2\sin^2\frac{\sqrt{3}x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{2x^n \times (\frac{\sqrt{3}x}{2})^2} \times \frac{\sqrt{1-x^3}+1}{\sqrt{1-x^3}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{2x^n \times \frac{3x}{4} \times 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{3x^n} \end{aligned}$$

اگر حاصل حد، موجود و مخالف صفر باشد، باید $n = 2$ و در این صورت حاصل حد $-\frac{1}{3}$ است؛ پس $n = 2$ و $a = \frac{-1}{3}$ است و در نتیجه $a^n = \frac{1}{9}$ باید در

صوت سؤال قید شود $a \neq 0$.

۲۲۱ گزینه ۳ طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} f(x) = xg(x) + 1 &\Rightarrow g(x) = \frac{f(x)-1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - 1)^2}{(\sin x + 1)^2} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - 1)^2 - (\sin x + 1)^2}{x(1 + \sin x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x \times 1} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -4 \end{aligned}$$

۲۲۲ گزینه ۴ گزینه چهارم صحیح است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + \underbrace{|x|}_{+}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به صورت $x - x$ یعنی صفر مطلق می‌شود.

۲۲۳ گزینه ۲

هرگاه x به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشه مضاعف مخرج است. یعنی $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است. بنابراین:

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = -4 + 4 = 0$$

۲۲۴ گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینه اول: } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^-} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty \text{ درست}$$

گزینه سوم: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$ نادرست :

گزینه چهارم: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^+} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^-} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = +\infty \end{array} \right. \rightarrow \text{نادرست}$

توجه کنید:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\frac{2\pi}{3})^+ = (-\frac{1}{2})^- \\ \cos(\frac{2\pi}{3})^- = (-\frac{1}{2})^+ \end{array} \right.$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\frac{4\pi}{3})^+ = (-\frac{1}{2})^+ \\ \cos(\frac{4\pi}{3})^- = (-\frac{1}{2})^- \end{array} \right.$$

۲۲۵ گزینه ۱ ابتدا عبارت داخل براکت را تعیین عدد می کنیم.

$$x \rightarrow (-\frac{1}{2})^- \Rightarrow x^2 \rightarrow (\frac{1}{4})^+ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{x^2} \rightarrow 12^- \\ \frac{2}{x^2} = 8^- \Rightarrow -\frac{2}{x^2} \rightarrow (-8)^+ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\frac{3}{x^2}] = 11 \\ [-\frac{2}{x^2}] = -8 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x + 8} = \frac{-5 - 5 + 11}{-8^- + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۲۲۶ گزینه ۲ وقتی $x \rightarrow -\frac{1}{2}^+$ داریم:

$$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{x^2} < -8 \Rightarrow [-\frac{2}{x^2}] = -9 \\ \frac{3}{x^2} > 12 \Rightarrow [\frac{3}{x^2}] = 12 \end{array} \right.$$

پس حد را می توان به صورت زیر بازنویسی و حل کرد:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \frac{-4 + 9}{(-12)^+ + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۲۲۷ گزینه ۴ از حد داده شده می فهمیم که مخرج به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ برابر صفر می شود:

$$a \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

حال ببینیم که مخرج کسر داده شده به ازای $x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+$ از چه سمتی به صفر نزدیک می شود:

$$x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+ : \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{3})^+ - \sin(\frac{\pi}{3})^+ = \sqrt{3}(\frac{1}{2})^- - (\frac{\sqrt{3}}{2})^+ = (\frac{\sqrt{3}}{2})^- - (\frac{\sqrt{3}}{2})^+ \rightarrow 0^-$$

پس حد مخرج کسر به صورت 0^- شده و نتیجه می گیریم که حد صورت عددی مثبت خواهد بود.

$$ax + b \Big|_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} > 0 \Rightarrow \sqrt{3}(\frac{\pi}{3}) + b > 0 \Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{3}} \simeq -1,000$$

کمترین مقدار صحیح b برابر -1 می شود.

۲۲۸ گزینه ۳

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 2a) \in f \\ (3a, 0) \in f \end{array} \right. \Rightarrow a' = \frac{2a}{-3a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a, \quad \left\{ \begin{array}{l} (0, 2m) \in g \\ (-m, 0) \in g \end{array} \right. \Rightarrow a'' = \frac{2m}{m} = 2 \Rightarrow$$

$$g(x) = 2x - m$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - m}{\left| -\frac{2}{3}x + 2a \right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-\frac{2}{3}x} = -3$$

۲۲۹ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$$

چون $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+$ است (x در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است) پس باید حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \pi^-$ عددی حقیقی و منفی باشد.

با بررسی گزینه ها داریم:

$$\text{گزینه ۴: } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{3x}{\pi} \right] - 3 = [3^-] - 3 = 2 - 3 = -1$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۳۰ گزینه ۳ با توجه به مقدار حد که $+\infty$ است، صورت کسر بایست عدد حقیقی منفی باشد؛ زیرا 0^- . $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \cos x = 0^-$

بررسی گزینه ها:

$$۱ \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 1 = 1$$

$$۲ \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left[\frac{2x}{\pi} \right] - 1 = 0$$

$$۳ \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left[\frac{3x}{\pi} \right] - 2 = -1$$

$$۴ \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} 3 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 2 = +2$$

۲۳۱ گزینه ۴ حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = -2\pi$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2\pi)^-} \frac{4 + k \left[\frac{x}{\pi} \right]}{\sin x} = \frac{4 - 2k}{0^-} = +\infty \Rightarrow 4 - 2k < 0 \Rightarrow k > \frac{4}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2\pi)^+} \frac{4 + k \left[\frac{x}{\pi} \right]}{\sin x} = \frac{4 - 2k}{0^+} = +\infty \Rightarrow 4 - 2k > 0 \Rightarrow k < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{4}{3} < k < 2 \Rightarrow -2 < -k < -\frac{4}{3} \Rightarrow [-k] = -2$$

۲۳۲ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = \frac{1 + 2k}{0^+} = -\infty \Rightarrow 1 + 2k < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = \frac{1 + k}{0^-} = -\infty \Rightarrow 1 + k > 0$$

$$k < -\frac{1}{2}, k > -1 \Rightarrow -1 < k < -\frac{1}{2}$$

طول و عرض نقاط داده شده منفی هستند؛ پس در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارند.

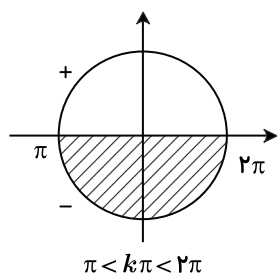
۲۳۳ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{k[x] - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2k - 2}{0^+} = +\infty \Rightarrow 2k - 2 > 0 \Rightarrow k > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k[x] - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k - 2}{0^-} = +\infty \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

$$\Rightarrow 1 < k < 2 \Rightarrow \pi < k\pi < 2\pi \Rightarrow \sin k\pi < 0$$

نقاط $(k\pi, \sin k\pi)$ در ناحیه چهارم محورهای مختصات قرار دارند.



۲۳۴ گزینه ۳ حد داده شده دارای ابهام $+\infty - \infty$ است که از کتاب حذف شده است و متأسفانه طراحان بدون توجه به کتاب درسی این سؤال را طرح کرده‌اند.

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرده و پس از استفاده از اتحاد مزدوج از صورت و مخرج جملات با توان بیشتر را انتخاب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 + x}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

۲۳۵ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۲۳۶ گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x^n - 12} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{4x^n} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{4x} = \frac{a}{4} = \frac{1}{6} \rightarrow 6a = 4 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1(2x)}{3\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{12}}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24}$$

۲۳۷ گزینه ۱ می‌دانیم که $0 = (-\infty)^{\text{عدد بزرگتر از یک}}$ است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 0}{2^{2n+1} + 0} = 1$$

۲۳۸ گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n}{ax^3} \xrightarrow{n=3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{3}{2} + 7} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

۲۳۹ گزینه ۲ می‌دانیم که $0 = (-\infty)^{\text{عدد بزرگتر از یک}}$ است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 2^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 0}{2 \times 3^{2n} - 0} = \frac{1}{2}$$

۲۴۰ گزینه ۴ ابتدا زیر هریک از رادیکال‌ها مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت $\sqrt{x}$ را به زیر رادیکال‌ها برده و با x هایی که از مخرج کسرها، فاکتور گرفته‌ایم ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{x^3+x}} \right) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$$

در واقع رفع ابهام $\infty \times 0$ است که مربوط به نظام قدیم است اما با ساده‌سازی عبارت می‌توان به جواب رسید.

۲۴۱ گزینه ۲ می‌دانیم: $\underbrace{۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۲n}_n = n \cdot (n + 1)$ مجموع n عدد زوج

چون حد تابع در منفي بی‌نهایت خواسته شده است پس از قاعدهٔ پر توان استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{۲+۴+\dots+۱۰۰} x^{۲+۴+\dots+۱۰۰}}}{a^{۴۹} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{۵۰ \times ۵۱} x^{۵۰ \times ۵۱}}}{a^{۴۹} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{۵۱} x^{۵۱}|}{a^{۴۹} x^k} = -۱$$

واضح است که $k = ۵۱$ است. از طرفی اگر $a = -۱$ باشد با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ می‌رود عبارت از داخل قدر مطلق مثبت خارج می‌شود و خواهیم داشت $a^۲ = -۱$ که نادرست است پس $a = ۱$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a^{۵۱} x^{۵۱}}{a^{۴۹} x^k} = -۱ \Rightarrow a^۲ = ۱ \xrightarrow{a > 0} a = ۱$$

۲۴۲ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^۴ - x^۲ + ۱} + \sqrt{x^۲ + ۱} - x^۲}{x} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^۴} + \sqrt{x^۲} - x^۲}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^۲ + |x| - x^۲}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -۱$$

۲۴۳ گزینه ۳ در $x \rightarrow ۱^+$ مقدار $[x]$ دقیقاً برابر ۱ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (۴ - [x])g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (۴ - ۱)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = ۶ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = ۲ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^۲ + bx + c}}{|x - ۱|} = ۲$$

حد مخرج در $x \rightarrow ۱^+$ برابر صفر است و چون حاصل حد برابر عدد متناهی ۲ است، پس باید حد صورت هم صفر شود و عبارت زیر رادیکال یعنی $ax^۲ + bx + c$ باید به فرم $a(x - ۱)^۲$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a(x - ۱)^۲}}{|x - ۱|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - ۱|\sqrt{a}}{|x - ۱|} = \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴$$

حال حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ را می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲ + bx + c}}{|x - ۱|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲}}{x - ۱} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲x}{x} = ۲$$

۲۴۴ گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + ۲} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^۲ + x + ۱}}{x + ۲} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^۲}}{x}$$

مشخص است که چون حد فوق برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس باید $a > ۰$ باشد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{a}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{a}}{x} = \sqrt{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

حال خواست سؤال را محاسبه می‌کنیم.

$$x \rightarrow -۱^- \Rightarrow x < -۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} > -۱ \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x}\right] f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -f(x) = -\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{1}{4}x^۲ + x + ۱} = -\sqrt{\frac{1}{4}(-۱)^۲ + (-۱) + ۱} = \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{۱}{۲}$$

۲۴۵ گزینه ۳

$$f \text{ تابع } \Rightarrow (o, 3m)(m, o)$$

$$\Rightarrow f(x) = -3x + 3m$$

$$g \text{ تابع } (4, o)(-3, o) \Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x + 3m|}{\frac{3}{4}x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\frac{3}{4}x} = -4$$

۲۴۶ گزینه ۳ طبق فرض داریم:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \xrightarrow{g=\frac{1}{f}} g(x) = \frac{cx + d}{ax + b}$$

$$\text{بنکته: } \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a} \\ g^{-1}(x) = \frac{-bx + d}{ax - c} \end{cases}$$

طبق برابری های حد در $(x \rightarrow -\infty)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$$

$$\text{خواسته سوال: } \lim_{x \rightarrow o^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow o^+} \frac{-dx + b}{cx - a} = \frac{-b}{a} = 1 \text{ یا } (-1)$$

۲۴۷ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = -\infty \Rightarrow \frac{a + 3 \left[-\left(\frac{1}{2} \right)^+ \right]}{1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^+} = \frac{a - 3}{1 - 1^+} = \frac{a - 3}{o^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow a - 3 > o \Rightarrow a > 3$$

چون $a > 3$ است پس

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left[\frac{x}{a} - a \right] = \left[\frac{\frac{1}{2}}{a} - \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right] \xrightarrow{\text{عبارت داخل براکت کوچکتر از صفر است}} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^- \right] = -1$$